

Chapitre 3

Géométrie Plane Élémentaire

Notons $\mathcal{P}$ le plan affine (ensemble des points du plan) et $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel (ensemble des vecteurs du plan).

On peut munir $\vec{\mathcal{P}}$ d'une loi de composition interne $+$ (somme de vecteurs).

On peut également lui adjoindre une loi de composition externe $\cdot$ (multiplication d'un vecteur par un scalaire réel).

Ces lois vérifient les propriétés suivantes

- (i) $(\vec{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe abélien
- (ii) Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\forall (\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \quad \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- (iii) Distributivité de $\cdot$ par rapport à l'addition des scalaires $\forall (\lambda, \mu, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}} \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- (iv) associativité mixte $\forall (\lambda, \mu, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
- (v) le scalaire 1 est un opérateur neutre pour la multiplication $\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}} \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

On résume ces propriétés en disant que $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3.1 Modes de Repérage dans le Plan

3.1.1 Coordonnées Cartésiennes

Définition 3.1.1 (système libre)

On dit les système $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs est libre lorsqu'ils sont non colinéaires.

Cela implique en particulier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls et distincts.

on a la caractérisation suivante :

$$(u, v) \text{ libre} \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} = 0 \implies (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0) \right]$$

lorsque $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas un système libre, on dit que le système est lié. ♠

Preuve Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un système libre. si par l'absurde l'un des eux vecteurs est nul, par exemple $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}$ ce qui signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires... contradiction

Pour montrer la caractérisation annoncé, il suffit de montrer que

$$\text{non}((\vec{u}, \vec{v}) \text{ libre}) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{non}(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} = 0 \implies (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0) \right])$$

c'est à dire :

$$u \quad \text{et} \quad v \text{ sont colinéaires} \quad \text{si et seulement si} \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \text{non}(a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0) \right]$$

soit encore

$$\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{v} \text{ sont colinéaires} \quad \text{si et seulement si} \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad (a \neq 0 \quad \text{ou} \quad b \neq 0) \right]$$

• Montrons l'implication directe : Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, il existe alors un réel α pour lequel on a $u = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$

Et donc en prenant $(a, b) = (-1, \alpha)$ (dans le cas où $u = \alpha v$) ou $(a, b) = (\alpha, -1)$ (dans le cas où $\vec{v} = \alpha \vec{u}$), on trouve que

$$a\vec{u} + b\vec{v} = 0$$

• Montrons la réciproque :

Si $a\vec{u} + b\vec{v} = 0$ avec alors :

-Premier cas : $a \neq 0$. Et donc $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$.

-Deuxième cas : $b \neq 0$. Et donc $\vec{v} = -\frac{a}{b}\vec{u}$.

Donc tous les cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. •

Remarque:

$a\vec{u} + b\vec{v}$ est ce qu'on appelle une *combinaison linéaire* des vecteurs u et v à l'aide des coefficients a et b .

Exercice: écrire la caractérisation d'un système de deux vecteurs liés.

Définition 3.1.2 (Repère et coordonnées cartésiennes)

Soient Ω un point du plan $\mathcal{P}$, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un système libre.

On dit alors que $\mathcal{R} := (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (resp. $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$) est un repère de $\mathcal{P}$ (resp. une base de $\vec{\mathcal{P}}$).

Ω est l'origine du repère $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont respectivement le premier et le deuxième vecteur de base.

Tout point M (resp. tout vecteur $\vec{\Omega M}$) admet une écriture unique de la forme :

$$\vec{\Omega M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

On dit que $\vec{\mathcal{P}}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

(x, y) sont les coordonnées du vecteur $\vec{\Omega M}$ (resp. du point M) dans le repère $\mathcal{R}$ (resp. la base $\mathcal{B}$). ♠

Preuve Nous ne montrerons pas qu'une telle décomposition existe, mais son unicité et le fait que les coordonnées d'un vecteur ne dépendent que de la base et non repère.

unicité : si par l'absurde $\vec{\Omega M}$ admet deux décompositions suivant la base $\mathcal{B}$

$$\vec{\Omega M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{\Omega M} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$$

On en déduit (d'après les propriétés des lois $+$ et $\cdot$)

$$\vec{0} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) - (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - x'\vec{e}_1 - y'\vec{e}_2 = (x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2$$

Or le système $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant libre cette combinaison linéaire ne peut contenir que des coefficients nuls :

$$x - x' = 0 \quad \text{et} \quad y - y' = 0$$

D'où la contradiction

Non dépendance :

En effet si dans le repère $(\Omega_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$,

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Dans le repère $(\Omega_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

On voit donc que les coordonnées sont les mêmes quelle que soit l'origine du repère. •

Exemple: En notant $O = (0; 0)$, $\vec{i} = (1; 0)$ et $\vec{j} = (0; 1)$ on voit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de $\mathbb{R}^2$. Ce repère porte le nom de repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.1.1 La donnée d'une base $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ permet d'identifier $\vec{\mathcal{P}}$ à $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}$) au moyen des l'application

$$\varphi_{\mathbb{R}^2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \vec{\mathcal{P}} \\ (x, y) & \mapsto & x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \end{array} \quad \left(\text{resp.} \quad \varphi_{\mathbb{C}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{P}} \\ z & \mapsto & \operatorname{Re}(z)\vec{e}_1 + \operatorname{Im}(z)\vec{e}_2 \end{array} \right)$$

Ces applications sont bijectives (surjectives et injectives) et $\mathbb{R}$ -linéaires.

On dit qu'elles réalisent un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^2$ (resp $\mathbb{C}$) et $\vec{\mathcal{P}}$ ♣

Preuve Faisons la preuve pour la première, celle de la deuxième étant identique ou découlant directement de l'isomorphisme $(a, b) \mapsto a + ib$.

Montrons le côté $\mathbb{R}$ -linéaire de $\varphi_{\mathbb{R}^2}$: Pour tout couple de réels (x, y) et tout réel λ :

$$\varphi_{\mathbb{R}^2}(\lambda \cdot (x, y)) = \varphi_{\mathbb{R}^2}((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x)\vec{e}_1 + (\lambda y)\vec{e}_2 = \lambda \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = \lambda \cdot \varphi_{\mathbb{R}^2}((x, y))$$

D'où l'homogénéité de degré de $\varphi_{\mathbb{R}^2}$.

Soit (x', y') un autre couple de réels :

$$\varphi_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi_{\mathbb{R}^2}((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 \dots$$

D'où l'additivité de $\varphi_{\mathbb{R}^2}$

Par ailleurs (e_1, e_2) étant une base on par définition des coordonnées

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

i.e.

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{u} = \varphi_{\mathbb{R}^2}((x, y))$$

Ceci caractérise le fait que $\varphi_{\mathbb{R}^2}$ est une bijection •

Remarque 3.1.1 Ces identifications dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$.

Avec les notations ci-dessus :

$\varphi_{\mathbb{R}^2}((x, y))$ désigne le vecteur $\vec{u}$ coordonnées (x, y) relativement au repère $\mathcal{B}$, on note $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$.

$\varphi_{\mathbb{C}}(z)$ désigne le point $\vec{u}$ d'abscisse z relativement au repère $\mathcal{B}$, on note $\vec{u}(z)_{\mathcal{B}}$. *

Remarque 3.1.2 Ces identifications (relatives à une base $\mathcal{B}$) nous permettent de voir le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec compatibilité des lois vectorielles :

la somme de deux vecteurs correspond à la somme des couples de coordonnées (resp. des abscisses) relatives à $\mathcal{B}$).

Le produit d'un vecteur par un scalaire correspond au produit du couple des coordonnées (resp. des abscisses) relatives à $\mathcal{B}$ par un réel.

Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont deux espaces vectoriels qui s'identifient à $\vec{\mathcal{P}}$ *

Deux vecteurs **non nuls** du plan u et v sont dits orthogonaux lorsque¹

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

un vecteur est normé, lorsqu'il est de norme 1.

Définition 3.1.3 Soit $\mathcal{R}$ un repère (resp. $\mathcal{B}$).

On dit que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un repère (resp. une base) orthogonale, lorsque les vecteurs de base sont orthogonaux.

On dit que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un repère (resp. une base) orthonormale, lorsque les vecteurs de base sont orthogonaux et normés.

Si de plus le plan est orienté et la mesure de l'angle entre le premier et le deuxième vecteur de base est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π on dira qu'il s'agit d'un repère (resp. base) orthonormale direct(e) (si congrue à $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π on la qualifiera d'indirecte). ♠

Exemple: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct de $\mathbb{R}^2$. $(O, \vec{j}, \vec{i})$ est un repère orthonormal indirect de $\mathbb{R}^2$

3.1.1.1 Changement de repère

Proposition 3.1.2 (Changement de Base) Soient $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}' := (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ deux b.o.n.d.

Tout vecteur $\vec{u}$ ayant pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$, et pour coordonnées (x', y') dans $\mathcal{B}'$, vérifie le passage entre "anciennes coordonnées" et "nouvelles" suivant :

$$\begin{cases} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

Où $\theta \equiv (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_1'}) \quad [2\pi]$ ♣

¹ici il semblerait que l'on ait besoin d'orienter le plan, mais il n'en est rien car la congruence à $\frac{\pi}{2}$ est modulo π

Preuve A l'aide de l'isomorphisme $\varphi_{\mathbb{C}}$ associé à la base $\mathcal{B}$, on peut identifier les vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ aux complexes de $\mathbb{C}$:

$z = x + iy$ correspond au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

On dira que z est l'affixe de $\vec{u}$ relativement à la base $\mathcal{B}$, on note $\vec{u}(z)_{\mathcal{B}}$

En particulier $\vec{e}_1(1)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2(i)_{\mathcal{B}}$.

Posons $\vec{e}_1'(z'_1)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{e}_2'(z'_2)_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}'$ étant une b.o.n.d. on a

$$\|\vec{e}_2'\| = \|\vec{e}_1'\| = 1 \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{e}_1', \vec{e}_2'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Ce qui équivaut à

$$|z'_2| = |z'_1| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z'_2}{z'_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Ce qui équivaut à $z'_1 = e^{i\alpha}$ et $z'_2 = iz'_1 = ie^{i\alpha}$.

Soit $\theta \equiv (e_1, e'_1) [2\pi]$, on a alors par un calcul analogue $z'_1 = e^{i\theta} \times 1 = e^{i\theta}$.

Or $z'_1 = e^{i\alpha}$, d'où $\alpha \equiv \theta [2\pi]$, ainsi

$$z'_1 = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z'_2 = ie^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{e}_1'(e^{i\theta})_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2'(ie^{i\theta})_{\mathcal{B}}$$

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées de u décrites dans l'énoncé de la proposition :

$$u = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2'$$

D'où par passage aux affixes relativement à $\mathcal{B}$, on trouve :

$$x + iy = x'e^{i\theta} + iy'e^{i\theta}$$

Soit

$$x' + iy' = e^{-i\theta}(x + iy) \quad \text{et} \quad x + iy = e^{i\theta}(x' + iy')$$

D'où la conclusion en comparant parties réelles et imaginaires. •

Remarque 3.1.3 si θ désigne une mesure de l'angle entre le premier vecteur de l'ancienne base ($\mathcal{B}$) et le premier vecteur de la nouvelle ($\mathcal{B}'$). Et si on note z l'affixe du vecteur u relativement à $\mathcal{B}$ et z' l'affixe de u relativement à $\mathcal{B}'$ on obtient la relation

$$z' = e^{-i\theta}z \quad \text{et} \quad z = e^{i\theta}z'$$

*

Corollaire 3.1.3 (Changement de Repère) Soient $\mathcal{R} := (\Omega, e_1, e_2)$ et $\mathcal{R}' := (\Omega', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ deux r.o.n.d. Tout point M ayant pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, et pour coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$, vérifie le passage entre "anciennes coordonnées" et "nouvelles" suivant :

$$\begin{cases} x' = -a' + x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -b' - x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = a + x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = b + x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

Où $\theta \equiv (e_1, e'_1) [2\pi]$ et $\vec{\Omega\Omega'}(a, b)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{\Omega\Omega'}(a', b')_{\mathcal{B}'}$

(voir proposition précédente pour les relations entre (a, b) et (a', b')).

(a, b) sont les coordonnées de Ω' dans l'ancien repère et $(-a', -b')$ sont les coordonnées de Ω dans le nouveau repère. ♣

Preuve les coordonnées de $\vec{\Omega M}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont (x, y) , donc dans la base $\mathcal{B}'$ elles deviennent (d'après la proposition précédente) $(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$ D'où

$$\vec{\Omega' M} = \vec{\Omega' \Omega} + \vec{\Omega M} = -a'\vec{e}_1' - b'\vec{e}_2' + (x \cos \theta + y \sin \theta)\vec{e}_1' + (-x \sin \theta + y \cos \theta)\vec{e}_2'$$

D'où les premières formules de passage.

Par un raisonnement analogue puisque (x', y') sont les coordonnées de $\vec{\Omega' M}$ dans $\mathcal{B}'$, on en déduit d'après la proposition précédente que $\vec{\Omega' M}$ a pour coordonnées $(x' \cos \theta - y' \sin \theta, x' \sin \theta + y' \cos \theta)$ dans $\mathcal{B}$. D'où

$$\vec{\Omega M} = \vec{\Omega\Omega'} + \vec{\Omega' M} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + (x' \cos \theta - y' \sin \theta)\vec{e}_1 + (x' \sin \theta + y' \cos \theta)\vec{e}_2$$

D'où les dernières formules de passage. •

Remarque: Soit un θ un angle de la rotation R_θ faisant passer de l'ancienne à la nouvelle base.

Soit (a, b) les coordonnées dans l'ancienne base du vecteur de la translation $T_{(a,b)}$ faisant passer l'ancienne origine à la nouvelle.

Notons que ces deux transformations conjointes envoient l'ancien vers le nouveau repère et de façon contravariante les nouvelles coordonnées vers les anciennes :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{(T_{(a,b)}, R_\theta)} \mathcal{R}' \quad \text{et} \quad (x', y') \xrightarrow{(T_{(a,b)}, R_\theta)} (x, y)$$

Définition 3.1.4 (Equation cartésienne)

Soit Γ un ensemble de points du plan, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. On dit que

$$f(x, y) = 0$$

est une équation cartésienne de Γ relativement au repère $\mathcal{R}$, lorsque :

Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient $f(x, y) = 0$.

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0\}$$

♠

Définition 3.1.5 (Equations paramétrées)

Soit Γ un ensemble de points du plan, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On dit que

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in \Lambda$$

est une équation paramétrée de Γ relativement au repère $\mathcal{R}$, lorsque :

Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient $x = f(t)$ $y = g(t)$ avec $t \in \Lambda$.

Λ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, Dans la pratique il s'agira souvent d'un intervalle.

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{OM} = f(t)\vec{e}_1 + g(t)\vec{e}_2\}$$

♠

3.1.2 Coordonnées Polaires

Dans toute cette section $\mathcal{P}$ est muni d'un r.o.n.d $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 3.1.6 (Repère polaire) Pour tout θ réel, le repère polaire d'origine O et d'angle θ est donné par

$$\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$$

avec

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

On dit que O est le pôle du repère polaire et le demi-axe, d'origine O et dirigé par $\vec{i}$ est dit l'axe polaire

♠

Exercice: Montrer que pour tout θ réel, $\mathcal{R}_\theta$ est un r.o.n.d.

Remarque: par identification des vecteurs de $\mathcal{P}$ à leurs affixes relativement à la base de $\mathcal{R}$, on a

$$\vec{u}_\theta \xleftrightarrow{\text{identification}} e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta \xleftrightarrow{\text{identification}} ie^{i\theta}$$

Définition 3.1.7 (Coordonnées Polaires) On dit que M a pour coordonnées polaires le couple de réels (r, θ) (relativement au repère $\mathcal{R}$) lorsque

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$$

♠

Proposition 3.1.4 Les coordonnées polaires un même point ne sont pas uniques

Si $M = O$ les coordonnées polaires sont les couples de la forme $(0, \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Si $M \neq O$ alors M admet au moins un couple de coordonnées polaires (r, θ) avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ les coordonnées polaires de M sont les couples

$$((-1)^k r, \theta + k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$



Remarque 3.1.4 Si $M \neq O$ a pour affixe z relativement au repère $\mathcal{R}$, alors $z \neq 0$ et son écriture trigonométrique $z = re^{i\theta}$ nous donne un couple de coordonnées polaires de $M : (r, \theta)$ *

3.1.2.1 Changement de coordonnées

Proposition 3.1.5 Soient (r, θ) et (x, y) des coordonnées respectivement polaires et cartésiennes d'un même point $M \neq O$. On a alors (avec des notations abusives)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$



Remarque 3.1.5 Dans la pratique pour passer des coordonnées cartésiennes (x, y) à polaires (r, θ) d'un point situé en de l'axe Oy , on calcule r au signe près puis on cherche l'unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ qui vérifie

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Ceci se fait au moyen de la fonction arctan (voir chapitre sur les fonctions usuelles) *

Définition 3.1.8 (Equation polaire)

Soit Γ un ensemble de points du plan, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée On dit que

$$f(r, \theta) = 0$$

est une équation polaire de Γ relativement au r.o.n.d. $\mathcal{R}$, lorsque :

Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées polaires (r, θ) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient $f(r, \theta) = 0$.

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^2; \quad \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad f(r, \theta) = 0\}$$



Définition 3.1.9 (Equations paramétrées)

Soit Γ un ensemble de points du plan, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On dit que

$$\begin{cases} r = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases} \quad t \in \Lambda$$

est une équation paramétrée de Γ relativement au repère $\mathcal{R}$, lorsque :

Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées polaires (r, θ) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient $r = f(t)$ et $\theta = g(t)$ avec $t \in \Lambda$.

Λ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, Dans la pratique il s'agira souvent d'un intervalle.

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{OM} = f(t) \vec{u}_{g(t)}\}$$



3.1.3 Coordonnées barycentriques

Définition 3.1.10 (Structure affine du Plan)

Pour un point Ω du plan fixé, on peut définir relativement à ce point l'addition d'un point A et d'un vecteur u , la somme de deux points A et B le produit d'un scalaire λ et d'un point A . Plus précisément

- $A + u$ désigne l'unique point M tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + u$
- $A + B$ désigne l'unique point P tel que $\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}$
- λA désigne l'unique point Q tel que $\overrightarrow{\Omega Q} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$

On dit que $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ est un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.



Remarque: Attention les expressions $A + B$ et λA dépendent implicitement du choix de Ω

Exercice: Montrer que $\mathcal{P}$ hérite avec ces lois d'une structure d'espace vectoriel?

Proposition 3.1.6 Soit Ω un point fixé du plan. Au moyen de l'isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\phi}_\Omega : & \mathcal{P} & \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ & M & \longmapsto \overrightarrow{\Omega M} \end{array}$$

$\mathcal{P}$ s'identifie à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ comme espace vectoriel



Remarque: Attention cette identification dépend implicitement du choix du point Ω

Remarque 3.1.6 Soit $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2)$, un repère fixé de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ s'identifie comme espace affine à $\mathbb{R}^2$ (resp $\mathbb{C}$) au moyen des isomorphismes d'espace affines

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{\mathbb{R}^2} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathcal{P} \\ (x, y) & \longmapsto & \Omega + (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) \end{array} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \Psi_{\mathbb{C}} : & \mathbb{C} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto & \Omega + (Re(z)\overrightarrow{e_1} + Im(z)\overrightarrow{e_2}) \end{array} \right)$$

Ces identifications dépendent du choix du repère $\mathcal{R}$.

Avec les notations ci-dessus :

$\Psi_{\mathbb{R}^2}((x, y))$ désigne le point de $\mathcal{P}$ coordonnées (x, y) relativement au repère $\mathcal{R}$, on note $M(x, y)_{\mathcal{R}}$.

$\Psi_{\mathbb{C}}(z)$ désigne le point M d'abscisse z relativement au repère $\mathcal{R}$, on note $M(z)_{\mathcal{R}}$.

*

Proposition 3.1.7 Soit $(A_i, a_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés du plan (il s'agit d'une famille de couples formés d'un point et d'un réel, on dit parfois que pour $i \in I$, a_i est le poids associé à A_i). l'application

$$\begin{array}{ccc} \Lambda : & \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ & M & \longmapsto \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{MA_i} \end{array}$$

Si $\sum_{k \in I} a_k = 0$ Alors cette application est constante

Si $\sum_{k \in I} a_k \neq 0$ Alors il existe un unique point $G \in \mathcal{P}$ qui vérifie $\Lambda(G) = \overrightarrow{0}$:

$$\exists! G \in \mathcal{P}; \quad \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$



Démonstration Remarquons grâce à la relation de Chasles que :

$$\forall (M, P) \in \mathcal{P}^2, \quad \Lambda(P) = \Lambda(M) - \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \overrightarrow{MP}$$

D'où le caractère constant lorsque $\sum_{k \in I} a_k = 0$.

Si on suppose $\sum_{k \in I} a_k \neq 0$, Alors :

$$\Lambda(G) = \overrightarrow{0} \iff (\forall M \in \mathcal{P}, \quad \Lambda(M) = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \overrightarrow{MG})$$

Ce qui caractérise de manière unique le point G par

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{MA_i}$$

•

Définition 3.1.11 Ce point G s'appelle le barycentre de la famille pondérée $(A_k, a_k)_{k \in I}$ et vérifie

$$(*) \quad \forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{MA_i}$$

On note

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bar}\left((A_i, a_i)_{i \in I}\right)$$

♠

Remarque 3.1.7 Etant donnée la caractérisation $(*)$, on peut noter sans ambiguïté

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bar}\left((A_i, a_i)_{i \in I}\right) \iff G = \frac{1}{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{i \in I} a_i A_i$$

cette identité traduite en terme d'affixes devient

$$z = \frac{1}{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{i \in I} a_i z_i$$

Où l'affixe z de G est la moyenne pondérée des affixes z_i des points A_i

*

Proposition 3.1.8 (Propriétés du barycentre) Le barycentre est inchangé lorsque :

- l'on change l'ordre des points pondérés
- on multiplie tous les poids par une même constante
- on retire de la famille des points dont le poids est nul

On a par ailleurs la propriété de distributivité suivante :

Si $G = \text{Bar}\left((A_k, a_k)_{k \in I}\right)$ **et** I **s'écrit comme l'union disjointe** $I = J \cup K$ **Alors** , dès que $\sum_{j \in J} a_j \neq 0$:

$$G = \text{Bar}\left((A_k, a_k)_{k \in K}, \left(g, \sum_{j \in J} a_j\right)\right) \quad \text{avec } g := \text{Bar}\left((A_j, a_j)_{j \in J}\right)$$

♣

Démonstration Nous nous démontrons que l'associativité. En reprenant les notations ci-dessus :

$$G = \frac{1}{S} \sum_{i \in I} a_i A_i = \frac{1}{S} \left(\sum_{j \in J} a_j A_j + \sum_{k \in K} a_k A_k \right)$$

avec $S := \sum_{i \in I} a_i$. Posons de même $S_J := \sum_{j \in J} a_j$ et $S_K := \sum_{k \in K} a_k$.

$$G = \frac{1}{S_J + S_K} \left(\sum_{j \in J} a_j A_j + S_K \left(\frac{1}{S_K} \sum_{k \in K} a_k A_k \right) \right) = \frac{1}{S_J + S_K} \left(\sum_{j \in J} a_j A_j + S_K g \right)$$

•

Remarque 3.1.8 Avec des notations abusives, on retiendra que l'associativité du barycentre s'écrit lorsque $a_{k_1} + \dots + a_{k_m} \neq 0$

$$G = \text{Bar}\left[(A_{j_1}, a_{j_1}), \dots, (A_{j_1}, a_{j_1}), \overbrace{\left(\text{Bar}\left[(A_{k_1}, a_{k_1}), \dots, (A_{k_1}, a_{k_1})\right], a_{k_1} + \dots + a_{k_m}\right)}^{(A_{k_1}, a_{k_1}), \dots, (A_{k_1}, a_{k_1})}\right]$$

*

Définition 3.1.12 (coordonnées barycentriques)

Si A, B, C sont trois points non alignés du plan Alors tout point M est barycentre de ces trois points : il existe un triplet de réels (α, β, γ) tel que :

$$M = \text{bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$$

En particulier :

Pour tout point M du plan il existe un unique triplet de réels (a, b, c) tel que :

$$M = aA + bB + cC \quad \text{et} \quad a + b + c = 1$$

(α, β, γ) (resp. (a, b, c)) sont des coordonnées barycentriques de M par rapport à (A, B, C) ♠

Preuve Puisque ces trois points sont non alignés, on a un repère en prenant $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Tout point M du plan admettant des coordonnées (x, y) dans ce repère, on a, par Chasles :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$$

Soit

$$(x + y - 1)\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{BM} - y\overrightarrow{CM} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad (x + y - 1) - x - y = -1 \neq 0$$

D'où $M = \text{Bar}[(A, x + y - 1), (B, -x), (C, -y)]$.

Enfin si on reprend les notations de l'énoncé et que l'on pose

$$a = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \quad b = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{et} \quad c = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

On a d'après les propriétés sur les barycentres

$$M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) = \text{Bar}((A, a), (B, a), (C, a)) \quad \text{et} \quad a + b + c = 1$$

D'où l'existence.

Montrons l'unicité.

Supposons qu'il existe deux triplets distincts de coordonnées barycentriques (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$

Posons $S = \alpha + \beta + \gamma$ et $S' = \alpha' + \beta' + \gamma'$. On a alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{S}(\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AG} = \frac{1}{S}(\beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC})$$

D'où

$$\left(\frac{\beta}{S} - \frac{\beta'}{S'}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\gamma}{S} - \frac{\gamma'}{S'}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Et donc puisque les vecteurs de base forment un système libre

$$\beta' = \frac{S'}{S}\beta \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{S'}{S}\gamma$$

enfin $\alpha' = S' - \beta' - \gamma' = S' \frac{S - \beta - \gamma}{S} = \frac{S'}{S}\alpha$ Et donc deux coordonnées barycentriques correspondent au même point si et seulement si elles sont proportionnelles.

Dans le cas qui nous occupe si on suppose de plus $S = S' = 1$, on voit que $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma')$. la preuve sur l'unicité en découle tout naturellement. •

Remarque: les coordonnées barycentriques ne sont pas uniques mais elles sont proportionnelles les unes aux autres : (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont toutes deux coordonnées barycentriques d'un même point si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad (\alpha' = k\alpha \quad \text{et} \quad \beta' = k\beta \quad \text{et} \quad \gamma' = k\gamma)$$

3.2 Produit Scalaire

Définition 3.2.1 (Géométrie) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Où θ est² une mesure (non orientée) de l'angle³ $(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour éviter toute confusion avec la loi de composition externe, on note aussi $(\vec{u}|\vec{v})$ ou $\langle \vec{u}|\vec{v} \rangle$ pour désigner le produit scalaire. ♠

Remarque 3.2.1 Pour tout vecteur u , on a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ *

Proposition 3.2.1 Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

♣

Preuve $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2[\pi]$
 si et seulement si $\|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
 si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ •

Corollaire 3.2.2 Les coordonnées (x, y) d'un vecteur $\vec{u}$ relativement à une b.o.n. $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, sont données par

$$x = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad y = \vec{u} \cdot \vec{e}_2$$

Plus précisément on a

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2$$

♣

Proposition 3.2.3 (Caractérisation à l'aide d'affixes relativement à une b.o.n)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$, on note a et b les affixes complexes relativement à $\mathcal{B}$ de u et v

$$u(a)_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad v(b)_{\mathcal{B}}$$

On a alors

$$u \cdot v = \operatorname{Re}(\bar{a}b)$$

♣

Preuve Dans le cas où $u = 0$ ou $v = 0$, l'affaire est entendu.

Supposons donc u et v non nuls, il en va donc de même pour les affixes a et b , dont on peut donner une écriture trigonométrique :

$$a = r_a e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = r_b e^{i\beta}$$

Par interprétation géométrique du module (dans un b.o.n) on a $|a| = \|u\|$ et $|b| = \|v\|$.

Par ailleurs $\arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$ correspond à une mesure de l'angle (u, v) (orienté par la base $\mathcal{B}$), or ici le plan n'étant pas orienté, cette mesure d'angle correspond (modulo 2π) à $\pm\theta$ on a donc

$$\beta - \alpha \equiv \pm\theta [2\pi]$$

D'où

$$\operatorname{Re}(\bar{a}b) = \operatorname{Re}\left(r_a r_b e^{i(\beta - \alpha)}\right) = \operatorname{Re}\left(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| e^{\pm i\theta}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\pm\theta)$$

On conclut grâce à la parité du cosinus

•

Proposition 3.2.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$, on note $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x', y')_{\mathcal{B}}$ on a alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

♣

²par définition!!!

³le plan n'a pas besoin d'être orienté.

Preuve En reprenant les notations de la proposition, on voit que $a = x + iy$ et $b = x' + iy'$ sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à $\mathcal{B}$. D'où d'après la proposition précédente :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{a}b) = \operatorname{Re}\left((x - iy)(x' + iy')\right) = xx' + yy'$$

•

Corollaire 3.2.5 Si $\mathcal{B}$ est un b.o.n. et que le vecteur $\vec{u}$ admet pour coordonnées (x, y) relativement à $\mathcal{B}$, alors le vecteur $\vec{v}(-y, x)_{\mathcal{B}}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Si on suppose de plus la base $\mathcal{B}$ directe et $\vec{u}$ unitaire, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une b.o.n.d. et on dit que $\vec{v}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{u}$. ♣

Proposition 3.2.6 l'application produit scalaire $(\cdot | \cdot) : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

Elle est linéaire par rapport à la première composante :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3, \quad (\vec{u} + \vec{v} | \vec{w}) = (\vec{u} | \vec{w}) + (\vec{v} | \vec{w}) \quad \text{et} \quad \forall(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2, \quad (\lambda \vec{u} | \vec{v}) = \lambda(\vec{u} | \vec{v})$$

Elle est linéaire par rapport à la deuxième composante :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3, \quad (\vec{w} | \vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} | \vec{u}) + (\vec{w} | \vec{v}) \quad \text{et} \quad \forall(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2, \quad (\vec{u} | \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} | \vec{v})$$

On résume ces deux dernières propriétés en disant que le produit scalaire est une application bilinéaire.

De plus le produit scalaire est symétrique.

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \quad (\vec{u} | \vec{v}) = (\vec{v} | \vec{u})$$

♣

Preuve Munissons $\mathcal{P}$ d'une b.o.n $\mathcal{B}$ le temps de la preuve. La symétrie se déduit aisément de la caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes. Il ne nous suffit donc de montrer la linéarité par rapport à la deuxième composante.

Soient donc u, v, w d'affixes respectives a, b, c relativement à $\mathcal{B}$ et λ un réel. en exploitant la linéarité de la partie réelle et la distributivité (et...), on trouve

$$(w, u + v) = \operatorname{Re}(\bar{c}(a + b)) = \operatorname{Re}(\bar{c}a + \bar{c}b) = \operatorname{Re}(\bar{c}a) + \operatorname{Re}(\bar{c}b) = \dots$$

$$(u, \lambda v) = \operatorname{Re}(\bar{a}(\lambda b)) = \operatorname{Re}(\lambda \bar{a}b) = \lambda \operatorname{Re}(\bar{a}b) = \lambda(u, v)$$

•

Corollaire 3.2.7

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} | \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} | \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v} | \vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} | \vec{v}) &= \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

♣

Remarque: la dernière identité porte le nom d'identité du parallélogramme : Interprétation géométrique.

Exercice: Démontrer le théorème de Pythagore :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Définition 3.2.2 (Mesure algébrique) Soit D une droite de direction $\vec{u}$.

Si A et B sont deux points de D , on appelle mesure algébrique $\overrightarrow{AB}$ relativement à la droite D orientée par $\vec{u}$ l'unique réel λ vérifiant

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$$

On a en particulier $\overrightarrow{AB} = \pm AB$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{u}\| \times \overrightarrow{AB}$ ♠

Remarque: lorsque A, B, C sont alignés on note sans ambiguïté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sans préciser l'orientation de la droite.

Définition 3.2.3 (Projeté orthogonal)

Soit D une droite du plan de direction $\vec{u}$ et M un point du plan. On appelle projeté orthogonal de M sur la droite D l'unique point H vérifiant

$$H \in D \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$$

♠

Exercice: Montrer l'existence et l'unicité de ce point H à l'aide de coordonnées cartésiennes dans un r.o.n.

Proposition 3.2.8 (Interprétation en terme de projection) Soient A, B, C trois points du plan. et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

où $\overrightarrow{AH}$ est la mesure algébrique relativement à la droite (AB) orientée par $\overrightarrow{AB}$ ♣

Preuve Par Chasles et par bilinéarité on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = AB \times \overrightarrow{AH} + 0$$

•

Remarque 3.2.2 On sait que la donnée d'une base (resp. d'un repère) nous permet d'identifier le plan aux espaces vectoriels (resp. affines) $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La donnée du produit scalaire ajoute une nouvelle structure à notre plan, une structure dite euclidienne. Pour rendre cette nouvelle structure compatible avec notre identification, la base (resp. repère) sera choisi orthonormée.

la donnée d'une b.o.n identifie le plan (euclidien) à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. *

Applications

Proposition 3.2.9 Soit D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur D est le point H vérifiant

$$AH = \frac{(AM|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2} \|\vec{u}\|$$

H est l'unique point qui minimise la fonction $P \mapsto d(M, P)$ lorsque P parcourt D , on dit que $d(M, D) \stackrel{\text{def}}{=} MH$ est la distance de M à H . ♣

Preuve Soit H le projeté orthogonal. on a $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{u}$. D'où

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2$$

Pour tout P de D

$$MP^2 = \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}\|^2 = MH^2 + MP^2 \geq MH^2 \quad \text{et} \quad H \in D$$

l'unicité provient du fait que si H' est un autre point qui minimise alors

$$0 = MH^2 - MH'^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH'} | \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MH'}) = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH'} | \overrightarrow{H'H}) = \underbrace{(\overrightarrow{MH} | \overrightarrow{H'H})}_0 + (\overrightarrow{MH'} | \overrightarrow{H'H})$$

D'où $\overrightarrow{MH'} \perp \overbrace{\overrightarrow{H'H}}^{\text{vecteur directeur de } \mathcal{D}}$ et $H' \in \mathcal{D}$ soit $H' = H$ (par définition du projeté orthogonal) •

Proposition 3.2.10 Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est une droite orthogonale à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ ♣

Preuve Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

Soit M_0 l'unique point de la droite D passant par A et dirigé par $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{AM_0} = \frac{k}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$.

M_0 vérifie alors $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = k$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 0 \iff \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) = 0$$

Soit

$$M \in \Delta_k \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

Notons $\mathcal{D}$ la droite passant par M_0 est dirigée par $\vec{v}$

• Soit $M \in \Delta_k$ Comme (u, v) forme une base orthogonale on a

$$\overrightarrow{M_0M} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad (\text{avec } a, b \text{ réels})$$

En fait puisque

$$0 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = a\vec{u} \cdot \vec{u} + b\vec{u} \cdot \vec{v} = a\|\vec{u}\|^2$$

D'où $a = 0$ et donc on a $\overrightarrow{M_0M}$ colinéaire à $\vec{v}$, i.e. $M \in \mathcal{D}$

• Réciproquement si $M \in \mathcal{D}$

Alors puisque $\overrightarrow{M_0M} = b\vec{v}$ avec $b \in \mathbb{R}$ et que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, on en déduit que $M_0M \cdot u = 0$. D'où $M_0 \in \Delta_k$.

• Conclusion

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad M \in \mathcal{D} \iff M \in \Delta_k$$

Ce qui prouve que $\mathcal{D} = \Delta_k$ •

3.3 Déterminant

Dans toute cette section le plan est supposé orienté par la donnée d'un r.o.n.d $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{B}$ sa base associée

Définition 3.3.1 (Géométrie) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ et défini par

$$\begin{aligned} \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls} \\ \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

où θ est⁴ une mesure orientée de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. ♠

Proposition 3.3.1 Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Deux vecteurs forment une base si et seulement si

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$$

⁴par définition!!!

Démonstration première équivalence : Soit l'un est nul soit $\theta = 0[\pi]$ (voir affixes $z_1 = kz_2$ d'où argument)

•

Proposition 3.3.2 Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ b.o.n alors

$\mathcal{B}$ b.o.n.d. si et seulement si $\text{Det}(e_1, e_2) = 1$

♣

Proposition 3.3.3 (Caractérisation à l'aide d'affixes relativement à une b.o.n.d.)

On rappelle que $\mathcal{B}$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{P}}$, on note a et b les affixes complexes relativement à $\mathcal{B}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$u(a)_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad v(b)_{\mathcal{B}}$$

On a alors

$$\text{Det}(u, v) = \text{Im}(\bar{a}b)$$

♣

Preuve Dans le cas où $u = 0$ ou $v = 0$, l'affaire est entendu.

Supposons donc u et v non nuls, il en va donc de même pour les affixes a et b , dont on peut donner une écriture trigonométrique :

$$a = r_a e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = r_b e^{i\beta}$$

Par interprétation géométrique du module et des arguments (dans une b.o.n.d.) on a $r_a = |a| = \|u\|$ et $r_b = |b| = \|v\|$ et

$$\beta - \alpha \equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \theta [2\pi]$$

Où θ est une mesure de l'angle orienté (u, v) .

$$\text{Im}(\bar{a}b) = \text{Im}\left(r_a r_b e^{i(\beta-\alpha)}\right) = \text{Im}\left(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| e^{i\theta}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\theta)$$

•

Proposition 3.3.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n.d.)

On rappelle que $\mathcal{B}$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{P}}$, on note $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x', y')_{\mathcal{B}}$ on a alors

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

On note aussi

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

♣

Preuve En reprenant les notations de la proposition, on voit que $a = x + iy$ et $b = x' + iy'$ sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à $\mathcal{B}$. D'où d'après la proposition précédente :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Im}(\bar{a}b) = \text{Re}\left((x - iy)(x' + iy')\right) = xy' - yx'$$

•

Proposition 3.3.5 l'application produit déterminant $\text{Det} : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

Elle est linéaire par rapport à la première composante :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3, \quad (\vec{u} + \vec{v} | \vec{w}) = (\vec{u} | \vec{w}) + (\vec{v} | \vec{w}) \quad \text{et} \quad \forall(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2, \quad (\lambda \vec{u} | \vec{v}) = \lambda(\vec{u} | \vec{v})$$

Elle est linéaire par rapport à la deuxième composante :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}^3, \quad (\vec{w} | \vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} | \vec{u}) + (\vec{w} | \vec{v}) \quad \text{et} \quad \forall(\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{P}}^2, \quad (\vec{u} | \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} | \vec{v})$$

On résume ces deux dernières propriétés en disant que le produit scalaire est une application bilinéaire.

De plus le déterminant est antisymétrique.

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \quad \text{Det}(\vec{u} | \vec{v}) = -\text{Det}(\vec{v}, \vec{u})$$

♣

Preuve Munissons $\mathcal{P}$ d'une b.o.n.d. $\mathcal{B}$ le temps de la preuve. La symétrie se déduit aisément de la caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes. Il ne nous suffit donc de montrer la linéarité par rapport à la deuxième composante.

Soient donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ d'affixes respectives a, b, c relativement à $\mathcal{B}$ et λ un réel. en exploitant la linéarité de la partie réelle et la distributivité (et...), on trouve

$$\begin{aligned} \text{Det}(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}) &= \text{Im}(\bar{c}(a + b)) = \text{Im}(\bar{c}a + \bar{c}b) = \text{Im}(\bar{c}a) + \text{Im}(\bar{c}b) = \text{Det}(\vec{w}, \vec{u}) + \text{Det}(\vec{w}, \vec{v}) \\ \text{Det}(\vec{u}, \lambda \vec{v}) &= \text{Im}(\bar{a}(\lambda b)) = \text{Im}(\lambda \bar{a}b) = \lambda \text{Im}(\bar{a}b) = \lambda \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

•

Proposition 3.3.6 (Interprétation Géométrique) *Etant donnés trois points non alignés A, B, C du plan, $|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ est égal à l'aire du parallélogramme dont les côtés sont portés par $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$* ♣

Preuve Première preuve à l'aide de la trigonométrie dans les triangles rectangles.

Ou, deuxième preuve.

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AC)

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Det}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Det}(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) + \text{Det}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) = HB \cdot AC \cdot \sin \theta$$

avec $\theta \equiv \widehat{(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ et donc $\sin \theta = \pm 1$. D'où

$$|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \text{base} \times \text{hauteur}$$

•

3.3.1 Applications

Corollaire 3.3.7 *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et B . Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a*

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})|}{AB}$$

♣

Preuve l'aire du parallélogramme $ABMD$ est égal à $AB \cdot MH = AB \cdot d(M, \mathcal{D})$ •

Proposition 3.3.8 *Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$ est une droite dirigée par $\vec{u}$* ♣

Preuve Soit M_0 sol particulière (exercice montrer qu'il en existe au moins un à l'aide par exemple de coordonnées cartésiennes).

$$M \in \Delta_k \iff \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM_0}) \iff \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) - \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM_0}) = 0 \iff \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) = 0$$

D'où $M \in \Delta_k$ si et seulement si $\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}) = k$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_0M}$ colinéaires. •

3.4 Droites du Plan

3.4.1 Equations et colinéarité

Dans toute cette section le plan est rapporté à un r.o.n.d. $\mathcal{R}$. on note $\mathcal{B}$ la b.o.n.d. associée.

Une droite est caractérisé par la donnée d'un point A et d'un vecteur non nul $\vec{u}$ (appelé le vecteur directeur). On note alors $A + \mathbb{R}\vec{u}$ la droite passant par A et dirigé par $\vec{u}$, elle est caractérisée par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \left(M \in \mathcal{D} \iff \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \right)$$

Proposition 3.4.1 (Equation paramétrique)

Soit $A(a, b)_{\mathcal{R}}$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha, \beta)_{\mathcal{B}}$ un vecteur non nul du plan. Une équation paramétrique dans un repère quelconque de la droite $A + \mathbb{R}\vec{u}$ est donnée par

$$\begin{cases} x &= a + \lambda\alpha \\ y &= b + \lambda\beta \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$



Exercice: Ecrire une équation paramétrique de la droite passant par les points $A(3, 2)$ et $B(5, -2)$.

Preuve Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}$

$$M \in A + \mathbb{R}\vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

D'où en passant aux coordonnées (x, y) de M on a

$$M \in A + \mathbb{R}\vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad x - a = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad y - b = \lambda\beta$$



Proposition 3.4.2 (Equation cartésienne et vecteur directeur) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. alors elle admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$

$$(*) \quad ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

Réciproquement toute équation de ce type est une équation de droite. En particulier : le vecteur $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{R}}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$



Démonstration • Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{R}}$ et passant par un point $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$. Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ un point du plan, on a :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{M_0M} \text{ colinéaire à } \vec{u} \iff \text{Det}[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0$$

On reconnaît bien une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ (car $\vec{u} \neq \vec{0}$) et $c = -ax_0 - by_0$

• Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble d'équation $(*)$. Posons $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{R}}$.

$$M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0 \iff \text{Det}(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = -c$$

(Où O est l'origine du repère).

On reconnaît là l'équation de la droite de vecteur directeur $\vec{u}$



Remarque: On retiendra qu'une équation cartésienne de la droite $M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$ avec $M_0(x_0, y_0)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Exercice: Montrer que cette proposition reste vraie dans un repère quelconque

Exercice: Ecrire une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(3, 2)$ et $B(5, -2)$.

3.4.2 Equations et orthogonalité

Définition 3.4.1 (vecteur normal)

Soit D une droite dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$. On dit que le vecteur non nul $\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite D lorsque

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$



Exercice: Montrer que cette définition ne dépend pas du choix du vecteur colinéaire $\vec{u}$

Proposition 3.4.3 Toute droite $\mathcal{D}$ se caractérise par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal non nul v . On note $\mathcal{D} = A + (\mathbb{R}v)^\perp$, cette droite se caractérise par

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \left(M \in \mathcal{D} \iff \vec{v} \perp \overrightarrow{AM} \right)$$



Preuve Soit un point A

- Du vecteur à la droite.

Soit v un vecteur non nul. On a vu que l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ est une droite $\mathcal{D}$ passant par A . de plus, si B est un autre point de $\mathcal{D}$ alors AB dirige $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ ce qui montre que v est normal à $\mathcal{D}$.

On a donc montré que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{v}$ caractérise bien une droite : la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal v

- De la droite au vecteur.

Réciproquement Montrons que toute droite se caractérise par un vecteur normal. Soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée par u , notons v un vecteur orthogonal à u , alors v est orthogonal à $\mathcal{D}$. Ainsi toute droite admet un vecteur normal. Or on sait que

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \iff M \in \mathcal{D}$$

Ceci justifie le fait que toute droite admet une normale v qui (avec le point A) la caractérise. •

Proposition 3.4.4 (Equations cartésiennes et vecteur normal)

Soit D une droite du plan. alors elle admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$

$$(*) \quad ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

Réciproquement toute équation de ce type est une équation de droite. En particulier : le vecteur $\vec{v}(a, b)_{\mathcal{R}}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$



Démonstration

- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{v}(a, b)_{\mathcal{R}}$ et passant par un point $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ un point du plan, on a :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{v} = 0 \iff (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$$

On reconnaît bien une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ (car $\vec{v} \neq \vec{0}$) et $c = -ax_0 - by_0$

- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble d'équation $(*)$. Posons $\vec{v}(a, b)_{\mathcal{R}}$.

$$M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0 \iff \vec{v} \cdot \overrightarrow{OM} = -c$$

(Où O est l'origine du repère).

On reconnaît là ligne de niveau correspondant à une droite de vecteur normal $\vec{v}$ •

Remarque: On retiendra qu'une équation cartésienne de la droite $M_0 + (\mathbb{R}\vec{v})^\perp$ avec $M_0(x_0, y_0)$ et $\vec{v}(a, b)$ est donnée par

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Exercice: Montrer que cette proposition reste vraie dans un r.o.n.

Proposition 3.4.5 Soient a, a', b, b', c, c' six réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

caractérisent une seule et même droite si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad a' = \lambda a \quad b' = \lambda b \quad \text{et} \quad c' = \lambda c$$



Preuve Supposons que ces deux équations représentent la même droite $\mathcal{D}$ les vecteurs $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{R}}$ et $\vec{u}'(-b', a')_{\mathcal{R}}$ sont donc deux vecteurs directeurs (non nuls) de la même droite donc colinéaires :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \vec{u}' = \lambda \vec{u}$$

($\lambda \neq 0$ car $\vec{u}' \neq \vec{0}$) En soustrayant la deuxième équation à la première multipliée par λ il vient

$$c' - \lambda c = 0$$

D'où l'implication directe.

La réciproque étant triviale on a donc bien l'équivalence. •

Exercice: Montrer que cette proposition reste vraie dans un repère quelconque.

Définition 3.4.2 (Equation Normale)

Toute droite admet une équation normale, il s'agit d'une équation du type

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1$$

où a, b, c sont des constantes réelles. Elles sont uniques au signe près. ♠

Preuve

• Existence :

Soit $\mathcal{D}$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ En multipliant tous ces coefficients par $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ on obtient bien une équation normale.

• unicité au signe près :

Soient $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ deux équations normales d'une seule et même droite, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad a' = \lambda a \quad b' = \lambda b \quad \text{et} \quad c' = \lambda c$$

Or $1 = a'^2 + b'^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) = \lambda^2$ D'où $\lambda = \pm 1$ •

Remarque 3.4.1 Toute droite admet une équation normale du type

$$\cos \theta x + \sin \theta y = p$$

avec θ et c deux constantes réelles.

Il s'agit de la droite de vecteur unitaire normal $\vec{u}_\theta$ (et donc de vecteur directeur $\vec{v}_\theta$). Plus précisément c'est la ligne de niveau

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_\theta = p$$

Réciproquement Partant d'une telle droite, l'angle θ correspond à une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OH})$ modulo π où H est le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$.

p est la mesure algébrique $\overrightarrow{OH}$ relativement à (OH) orienté par $\vec{u}_\theta$ *

Preuve Tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a^2 + b^2 = 1$ correspond à un nombre complexe $a + ib$ de module 1. Ainsi on peut écrire $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$ •

3.4.3 Droites remarquables

Définition 3.4.3 (Droites parallèles et orthogonales) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont des vecteurs directeurs colinéaires.

On note $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$.

On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

On note $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$. ♠

Exercice: Montrer que ces définitions ne dépendent pas du choix des vecteurs colinéaires

Proposition 3.4.6

$A + \mathbb{R}u$ est parallèle à $A' + \mathbb{R}u'$ si et seulement si $\text{Det}(u, u') = 0$

$A + (\mathbb{R}v)^\perp$ est parallèle à $A' + (\mathbb{R}v')^\perp$ si et seulement si $\text{Det}(v, v') = 0$ ♣

Preuve la première équivalence est une conséquence directe de la définition.

Montrons la deuxième. Notons $v(a, b)$ et $v'(a', b')$ Soient $u(-b, a)$ et $u'(-b', a')$. On a

$$\text{Det}(v, v') = ab' - a'b = \text{Det}(u, u')$$

•

Proposition 3.4.7

$A + \mathbb{R}u$ est orthogonale à $A' + \mathbb{R}u'$ si et seulement si $(u|u') = 0$

$A + (\mathbb{R}v)^\perp$ est orthogonale à $A' + (\mathbb{R}v')^\perp$ si et seulement si $(v|v') = 0$

♣

Preuve la première équivalence est une conséquence directe de la définition.

Montrons la deuxième. Notons $v(a, b)$ et $v'(a', b')$ Soient $u(-b, a)$ et $u'(-b', a')$. On a

$$(v|v') = aa' + b'b = (u|u')$$

•

Exercice: Caractériser à l'aide des coefficients de leurs équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$, le fait que deux droites sont parallèles ou orthogonales

Définition 3.4.4 Si A et B sont deux points distincts l'ensemble des points équidistants de A et B s'appelle la médiatrice de $[AB]$. c'est la droite $I + (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^\perp$ avec I le milieu de $[AB]$.

♠

Preuve

$$MA = MB \iff \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\|^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\|^2 \iff MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$\text{D'où } MA = MB \iff \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = 0 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff M \in I + (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^\perp.$$

•

Définition 3.4.5 Si $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}' = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}'$ sont deux droites sécantes en A . l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$ s'appellent les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. c'est la réunion de deux droites orthogonales de la forme $A + \mathbb{R}\overrightarrow{w}$ où $\overrightarrow{w}$ est tel que

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}'}) \quad [\pi]$$

♠

Exercice: le prouver (voir exercice 3 feuille 3)

Preuve On travaille sur des équations normales relativement à un r.o.n.d. $\mathbb{R} = (A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
 $\mathcal{D} = A + (\mathbb{R}\overrightarrow{u}(\theta))^\perp = A + \mathbb{R}\overrightarrow{v}(\theta)$ et $\mathcal{D}' = A + (\mathbb{R}\overrightarrow{u}(\theta'))^\perp = A + \mathbb{R}\overrightarrow{v}(\theta')$

$$\cos \theta x + \sin \theta y = 0 \quad \text{et} \quad \cos \theta' x + \sin \theta' y = 0$$

Pour $M(x_0, y_0)$, $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')$ équivaut à

$$(\cos \theta - \cos \theta')x_0 + (\sin \theta - \sin \theta')y_0 = 0 \quad \text{ou} \quad (\cos \theta + \cos \theta')x_0 + (\sin \theta + \sin \theta')y_0 = 0$$

Ce qui équivaut à (puisque $\mathcal{D} \nparallel \mathcal{D}'$) :

$$x_0 \cos \frac{\theta + \theta'}{2} + y_0 \sin \frac{\theta + \theta'}{2} = 0$$

ou

$$-x_0 \sin \frac{\theta + \theta'}{2} + y_0 \cos \frac{\theta + \theta'}{2} = 0$$

C'est à dire $M \in [A + (\mathbb{R}\overrightarrow{u}(\frac{\theta+\theta'}{2}))^\perp] \cup [A + (\mathbb{R}\overrightarrow{v}(\frac{\theta+\theta'}{2}))^\perp] = [A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}(\frac{\theta+\theta'}{2})] \cup [A + \mathbb{R}\overrightarrow{v}(\frac{\theta+\theta'}{2})]$

•

3.4.4 Applications

Définition 3.4.6 Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. On appelle mesure de l'angle $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tout nombre θ vérifiant

$$(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) \equiv \theta \quad [\pi]$$



Proposition 3.4.8 (Equation Polaire)

Soit $(\mathcal{R}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ la famille repères polaires associée au r.o.n.d $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit θ_0 une mesure d'angle entre l'axe polaire $O + \mathbb{R} \vec{i}$ et $\mathcal{D}$. on a alors

si $\mathcal{D}$ passe par O , $\mathcal{D}$ admet pour équation polaire en (r, θ)

$$\theta = \theta_0$$

si $\mathcal{D}$ ne passe pas par O , $\mathcal{D}$ admet pour équation polaire en (r, θ)

$$r = \frac{p}{\sin(\theta - \theta_0)}$$

avec p un réel.



Démonstration Par construction $\vec{u}_{\theta_0}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et donc $\vec{v}_{\theta_0}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$. On en déduit l'équation normale

$$(*) \quad -\sin \theta_0 x + \cos \theta_0 y = p$$

Par changement de coordonnées on a

$$(*) \iff -r \cos \theta \sin \theta_0 + r \sin \theta \cos \theta_0 = p \iff r \sin(\theta - \theta_0) = p$$

Si $\mathcal{D}$ passe par O alors $p = 0$, d'où $r = 0$ ou $\theta \equiv \theta_0 + \pi$

Sinon $p \neq 0$ et donc $\sin(\theta - \theta_0) \neq 0$, d'où l'équation



Remarque 3.4.2 En reprenant les notations ci-dessus, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne en (X, Y) relativement au r.o.n.d $\mathcal{R}_{\theta_0}$

$$Y = p$$



Preuve Soit M de coordonnées (x, y) resp. (X, Y) relativement aux repères $\mathcal{R}$ (resp $\mathcal{R}_{\theta_0}$). Par changement de repère on a

$$Y = -\sin \theta_0 x + \cos \theta_0 y$$

D'où

$$M \text{ vérifie } (*) \iff M \text{ vérifie } Y = p$$



Proposition 3.4.9 (Calcul de distances) Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ (r.o.n.d.)

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

et $M(X, Y)$ un point du plan. On a

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|aX + bY + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Preuve Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ on a en particulier $c = -ax_0 - by_0$.
Notons $\vec{u}(-b, a)$ c'est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On en déduit

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|a(X - x_0) + b(Y - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

•

Corollaire 3.4.10 Avec le notations de la proposition on a :

$$M \in \mathcal{D} \iff d(M, \mathcal{D}) = 0$$

♣

Remarque 3.4.3 Si deux droites sont parallèles elles peuvent alors être confondues (si elles passent par le même point) ou strictement parallèles (si elles n'ont aucun point en commun).

*

Preuve Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles alors on peut écrire $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathcal{D}' = A' + \mathbb{R}\vec{u}$. On voit alors que

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{A'M} \iff \mathcal{D} = \mathcal{D}' = (AA')$$

D'où deux possibilités soit aucun point en commun ou droites confondues

•

Proposition 3.4.11 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$

$$\mathcal{D} \text{ parallèle à } \mathcal{D}' \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes, et l'on a
 $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est réduit à un seul point dont les coordonnées (X, Y) sont donnés par

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

♣

Preuve Supposons (X, Y) convienne au système (S) d'équation des droites.
Alors en multipliant la première ligne par b' et la deuxième par b

$$(S) \implies \begin{cases} b'aX + b'bY &= b'c \\ ba'X + bb'Y &= bc' \end{cases}$$

D'où en soustrayant ligne à ligne $(b'a - ba')X = b'c - bc'$

D'où $X = \dots$ Calcul analogue pour Y .

Réciproquement si X et Y sont donnés par les formules ci-dessus, montrons qu'ils conviennent.

$$aX + bY = \frac{1}{\Delta} \left(a \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta} \left(\begin{vmatrix} c & ab \\ c' & ab' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ba & c \\ ba' & c' \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta} \left(\begin{vmatrix} c & ab \\ c' & ab' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & ba \\ c' & ba' \end{vmatrix} \right)$$

D'où

$$aX + bY = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c & 0 \\ c' & ab' - ba' \end{vmatrix} = c$$

Calcul analogue pour $a'X + b'Y$.

Et donc on voit bien que les expressions proposées pour X et Y conviennent.

•

Proposition 3.4.12 (interprétation en terme de systèmes) Lorsque l'on étudie le système linéaire à deux inconnues x et y et deux équations

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

On a

• (S) admet un unique couple solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ On dit alors que (S) est un système de Cramer et l'unique couple solution est donné par

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

• (S) admet une infinité ou aucun couple solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

(S) admet une infinité de couples solutions lorsque les deux équations se déduisent l'une de l'autre par la multiplication par une constante. l'ensemble des couples solutions (X, Y) est caractérisé par une seule des deux équations. Ce sont toutes les coordonnées des points d'une droite ou $\mathbb{R}^2$ tout entier. ♣

Exercice: le prouver à l'aide de la proposition précédente en traitant à part le cas $(a, b) = (0, 0)$ ou $(a', b') = (0, 0)$

3.5 Cercles du Plan

Définition 3.5.1 On appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon R avec $R \geq 0$ l'ensemble de points M tel que

$$\Omega M = R$$

On note $C(\Omega, R)$ un tel ensemble.

lorsque $R = 0$ ce cercle est réduit à un point, son centre : $C(\Omega, 0) = \{\Omega\}$ (on parle de cercle-point).

Deux points symétriques par rapport au centre Ω sont dit diamétralement opposés. ♠

Proposition 3.5.1 Par deux points distincts A et B passe un et un seul cercle dont le diamètre est $[AB]$, on le note $C(A, B)$ ♣

Proposition 3.5.2 Par trois points non alignés passe un et un seul cercle ♣

Preuve Faire dessin intersection des médiatrices pour avoir le centre. •

3.5.1 Quelques lignes de niveau

Théorème 3.5.3 (Angle au centre) Le plan est supposé orienté.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et A, B, M trois points de $\mathcal{C}$. On a

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \equiv 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \quad [2\pi]$$

♣

Preuve Notons r le rayon de $\mathcal{C}$ et considérons $\mathcal{R}$ le r.o.n.d. d'origine Ω et dont le premier vecteur de base est $\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{r}$. Dans ce repère on a : $A(r)_{\mathcal{R}}$, $B(re^{i\beta})_{\mathcal{R}}$ et $M(re^{i\theta})_{\mathcal{R}}$

$$\frac{z-b}{z-1} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\beta}}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\beta}(e^{i\theta-\beta} - 1)}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{e^{i\beta}e^{i\frac{\theta-\beta}{2}}(e^{i\frac{\theta-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\beta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(2i \sin \frac{\theta}{2})} = \frac{e^{i\frac{\beta}{2}} \sin \frac{\theta-\beta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

D'où $\arg\left(\frac{z-b}{z-1}\right) \equiv \frac{\beta}{2} \equiv \arg\left(\frac{b}{1}\right) \quad [\pi]$. Ce qui traduit bien le résultat escompté. •

Proposition 3.5.4 Soit $\mathcal{R}$ un r.o.n.d.

Soient $A(a)_{\mathcal{R}}, B(b)_{\mathcal{R}}, C(c)_{\mathcal{R}}$ et $D(d)_{\mathcal{R}}$ quatre points distincts et leurs affixes relativement à $\mathcal{R}$. les assertions suivantes sont alors équivalentes

- (i) A, B, C, D sont cocycliques (i.e. sur un même cercle) ou alignés
- (ii) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) [\pi]$
- (iii) $\frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$



Preuve Les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes de façon claires. Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii).

En effet dans le cas où les points sont alignés on a

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 0 [\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0 [\pi]$$

Dans le cas où ils sont cocycliques on a d'après ce qui précède (si on note Ω le centre du cercle considéré)

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [\pi]$$

Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i).

• 1er Cas A, B, C alignés

Alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 0 [\pi]$, d'où $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0 [\pi]$, ce qui signifie que DB et DA sont colinéaires, D'où $A \in (BD)$ et donc A, B, C, D sont alignés

• 2eme Cas A, B, C non alignés

Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par A, B, C . D ne peut être aligné avec A et B (car le raisonnement précédent donnerait alors que A, B, C sont alignés). Soit $\mathcal{C}'$ le cercle passant par A, B, D .

Soit Δ passant par A tel que :

1. Δ non tangent à $\mathcal{C}$
2. Δ non tangent à $\mathcal{C}'$
3. $\Delta \neq (AB)$

Ceci est possible car hormis ces trois droites là, il en existe une infinité passant par A . On en déduit que

1. Δ coupe $\mathcal{C}$ en A et E deux points distincts
2. Δ coupe $\mathcal{C}'$ en A et F deux points distincts
3. $E \neq B$ et $F \neq B$

Puisque d'une part A, B, E, C sont distincts et cocycliques et que, d'autre part, D, A, F, B sont distincts et cocycliques, on déduit grâce à (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) [\pi]$$

Or par construction $(EA) = (FA)$, d'où $(EB) \parallel (FB)$, et donc $(EB) = (FB)$.

On a alors $(AE) \cap (EB)$ contiennent les points E et F . Or puisque A, E, B sont non alignés (AE) et (EB) sont sécantes, d'où $E = F$. Et donc :

$\mathcal{C}$ est l'unique cercle passant par $A, B, E = F$ est l'unique cercle passant par A, B, F . •

Corollaire 3.5.5 *Le plan est supposé orienté.*

Soient A, B deux points distincts du plan et $\alpha \in]0, \pi[$.

L'ensemble des points M du plan vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [\pi]$ est un cercle passant A et B et privé des points A et B ♣

Preuve Soit M_0 vérifiant la congruence ci dessus (montrer qu'il existe prendre par exemple point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la droite $\mathcal{D}$ issue de A et faisant un angle de $\frac{\pi-\alpha}{2}$ avec (AB)). Puisque $\alpha \neq 0 [\pi]$, on en déduit A, B, M_0 non alignés on peut donc considérer $\mathcal{C}$ passant par ces trois points.

Soit M un point du plan

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [\pi] \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B}) [\pi] \iff A, B, M_0, M \text{ cocycliques}$$

le cas alignés étant écarté car A, B, M_0 ne le sont pas. D'où

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [\pi] \iff M \in \mathcal{C} - \{A, B\}$$

La réciproque est une conséquence directe de la proposition ci-dessus. Qui nous donne une mesure constante pour $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo π) Cette constante étant non nulle (modulo π) car on suppose les points A, B, M cocycliques et non alignés. •

Proposition 3.5.6 Soient A et B deux points distincts du plan.

$$M \in C(A, B) \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

♣

Preuve on introduit le milieu I de $[AB]$. D'où $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \iff MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0$$

•

3.5.2 Equations

Proposition 3.5.7 (Equation Cartésienne) Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé.

Tout cercle admet pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

où les constantes réelles sont telles que $c \leq a^2 + b^2$

Réciproquement toute équation de ce type caractérise un cercle. Plus précisément il s'agit du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ ♣

Preuve

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$$

avec $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. D'où, dans un r.o.n.

$$M(x, y) \in C(\Omega, R) \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

•

Proposition 3.5.8 Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ le cercle $C(A, B)$ admet pour équation cartésienne relativement au r.o.n. $\mathcal{R}$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

♣

Preuve Dans un r.o.n.

$$M \in C \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

•

Proposition 3.5.9 (Equation Paramétrique) Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé.

Le cercle de centre $\Omega(a, b)_{\mathcal{R}}$ et de rayon R admet pour équation paramétrique relativement à $\mathcal{R}$ (r.o.n.)

$$\begin{cases} x &= a + R \cos t \\ y &= b + R \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

♣

Preuve Le cas $R = 0$ est trivial et par ailleurs

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \iff \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1 \iff \exists t \in \mathbb{R}, \frac{x - a}{R} = \cos t \quad \text{et} \quad \frac{y - b}{R} = \sin t$$

•

Remarque 3.5.1 Dans cette paramétrisation on peut restreindre t à ne parcourir qu'un intervalle de longueur 2π ($]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$ par exemple) *

Corollaire 3.5.10 Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ le cercle ci-dessus privé du point $A(a - R, b)$ admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= a + R \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= b + R \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



Remarque: nous verrons l'équation polaire d'un cercle au Chapitre *Coniques*

3.5.3 Intersections, Droites et Cercles remarquables

Proposition 3.5.11 (Intersection droite Cercle)

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{C} = C(\Omega, R)$ un cercle avec $R > 0$.

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{D}) > R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \text{ est vide} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) = R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \text{ est réduit à un point} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) < R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \text{ est constitué de deux points distincts} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$



Preuve Si $\Omega \in \mathcal{D}$, il est clair que $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est composé de deux points diamétralement opposés (voir équations cartésiennes). Sinon :

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.

Notons $d = \Omega H = d(\Omega, \mathcal{D})$ et $\mathcal{R} = (\Omega, \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{d}, \dots)$ un r.o.n. (direct tant qu'à faire.).

Relativement à $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ admettent pour équations respectives

$$x = d \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = R^2$$

D'où

$$M(X, Y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff (X = d \quad \text{et} \quad Y^2 = R^2 - d^2)$$



Définition 3.5.2 (Droite tangente)

Avec les notations ci-dessus, on dit que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en A lorsque $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{A\}$.

la tangente en A au cercle $\mathcal{C} = C(\Omega, R)$ (autre qu'un cercle point) est la droite $\mathcal{D} = A + (\mathbb{R} \overrightarrow{\Omega A})^\perp$



Proposition 3.5.12 Si dans un r.o.n.d. (direct est inutile) le cercle $\mathcal{C}$ admet pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Alors sa tangente en $A(x_A, y_A)$ admet pour équation

$$xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$$



Preuve Soit $M(X, Y)$. On a

$$M \in \mathcal{D} \iff (X - x_A)(x_A - a) + (Y - y_A)(y_A - b) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$Xx_A + Yy_A - aX - bY + ax_A + by_A - \underbrace{(x_A^2 + y_A^2)}_{2ax_A + 2by_A - c} = 0$$



Proposition 3.5.13 (Intersection de deux cercles)

Soient $\mathcal{C}_1 = C(\Omega_1, R_1)$ et $\mathcal{C}_2 = C(\Omega_2, R_2)$ deux cercles non concentriques. Notons $d = \Omega_1\Omega_2$

$$\begin{aligned} |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2 &\iff \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \text{ est constitué de deux points distincts} \\ d = |R_1 - R_2| \text{ ou } d = R_1 + R_2 &\iff \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \text{ est réduit à un point} \\ d < |R_1 - R_2| \text{ ou } d > R_1 + R_2 &\iff \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \text{ est vide} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ ♣

Preuve dans le r.o.n. (direct tant qu'à faire) $\mathcal{R} = (\Omega_1, \frac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{d}, \dots)$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont pour équations

$$x^2 + y^2 = R_1^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = R_2^2$$

Donc

$$M(X, Y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \iff \left(X^2 + Y^2 = R_1^2 \quad \text{et} \quad -2dX + d^2 = R_2^2 - R_1^2 \right) \iff M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation

$$X = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}$$

en particulier

$$d(\Omega_1, \mathcal{D}) = \frac{|R_1^2 - R_2^2 + d^2|}{2d}$$

D'où la conclusion grâce à

$$\begin{aligned} d(\Omega_1, \mathcal{D}) > R_1 &\iff d < |R_1 - R_2| \quad \text{ou} \quad d > R_1 + R_2 \\ d(\Omega_1, \mathcal{D}) = R_1 &\iff d = |R_1 - R_2| \quad \text{ou} \quad d = R_1 + R_2 \\ d(\Omega_1, \mathcal{D}) < R_1 &\iff |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2 \end{aligned}$$

En effet

$$\Delta := \left(\frac{|R_1^2 - R_2^2 + d^2|}{2d} \right)^2 - R_1^2 = \frac{(R_1^2 - R_2^2 + d^2 - 2dR_1)(R_1^2 - R_2^2 + d^2 + 2dR_1)}{4d^2} = \frac{P(d)Q(d)}{4d^2}$$

avec

$$P(X) = (R_1 - X)^2 - R_2^2 = (R_1 - R_2 - X)(R_1 + R_2 - X) \quad \text{et} \quad Q(X) = (R_1 + X)^2 - R_2^2 = (R_1 - R_2 + X)(R_1 + R_2 + X)$$

D'où

$$\Delta = \frac{[(R_1 - R_2)^2 - d^2][(R_1 + R_2)^2 - d^2]}{4d^2} = \underbrace{\frac{[|R_1 - R_2| + d][(R_1 + R_2) + d]}{4d^2}}_{\geq 0} [|R_1 - R_2| - d][(R_1 + R_2) - d]$$

Définition 3.5.3 Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de rayons strictement positifs et d'intersection non vide. Soit $A \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. et notons Δ_1 et Δ_2 les tangentes respectives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en A .

On dit que $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}_2$ en A , lorsque : $\Delta_1 = \Delta_2$

On dit que $\mathcal{C}_1$ est orthogonal à $\mathcal{C}_2$ en A , lorsque : $\Delta_1 \perp \Delta_2$ ♠

Exercice: Montrer que cette définition est indépendante du point d'intersection A .

Proposition 3.5.14 Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comme ci-dessus, on note Ω_1 et Ω_2 leurs centres respectifs :
 $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}_2$ en A si et seulement si $\overrightarrow{\Omega_1 A}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_2 A}$
 $\mathcal{C}_1$ est orthogonal à $\mathcal{C}_2$ en A si et seulement si $\overrightarrow{\Omega_1 A} \perp \overrightarrow{\Omega_2 A}$ ♣