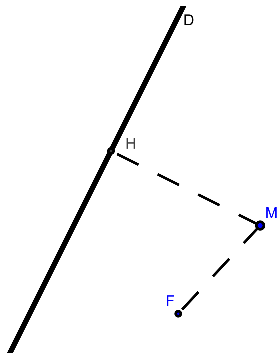
Chapitre 8

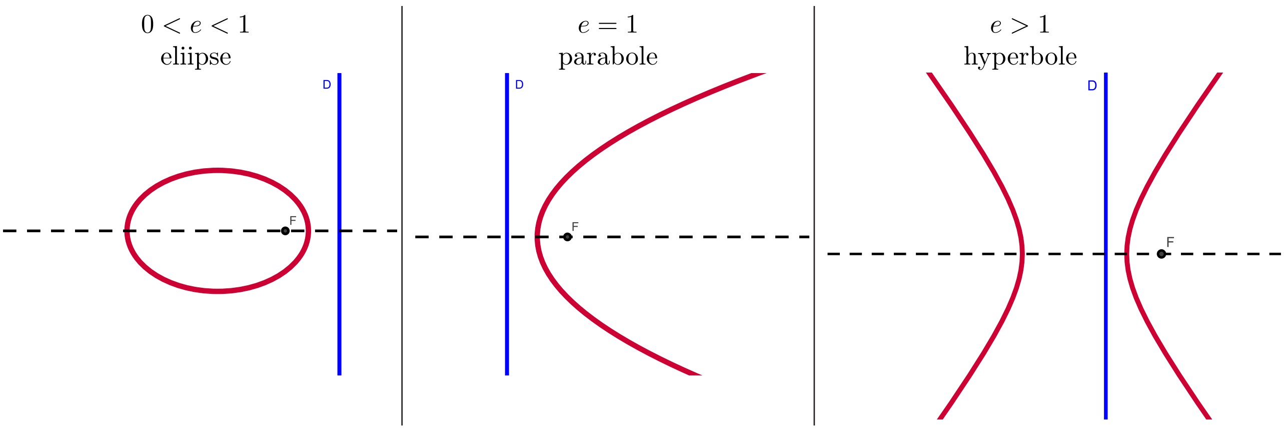
Coniques

8.1 Lignes de Niveau

Soient $F \in \mathcal{P}$ u point fixé $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F.
Pour $e \in \mathbb{R}_+^*$, la ligne de niveau e associée à l'application $M \mapsto \frac{MF}{MH}$, où H désigne le projeté orthogonal de M du $\mathcal{D}$:



correspond à l'ensemble $\mathcal{C} := \{M \in \mathcal{P} | \quad MF = eMH\}$.
On appelle cet ensemble conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.
Parmi les coniques on en distingue de trois sortes



La droite passant par F et orthogonal à la directrice est la droite focale de $\mathcal{C}$.
L'axe focal est un axe de symétrie pour la conique $\mathcal{C}$.
Si $h \overset{def}{=} d(F, D)$, $p \overset{def}{=} eh$ est le paramètre de $\mathcal{C}$, p est la distance qui sépare F de $C \cap (F + \overrightarrow{\mathcal{D}})$

8.2 Définitions bifocales

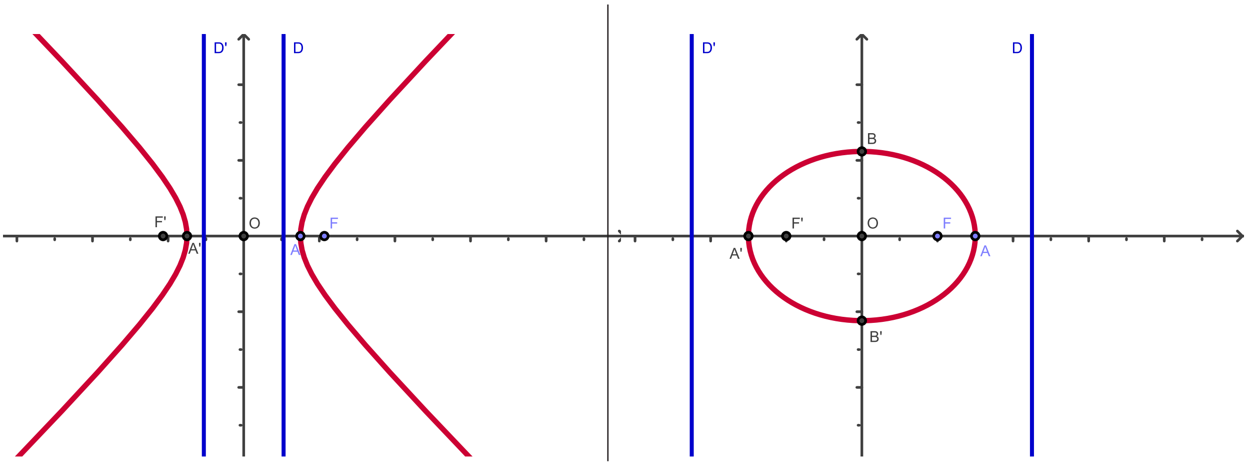
Soient F et F' deux points distincts de $\mathcal{P}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixés

Proposition 8.2.1 *On pose O milieu de $[FF']$ et on note $c := OF = OF' = \frac{FF'}{2}$*

Si $a > c$ **Alors** *la ligne de niveau $2a$ associée à l'application $M \mapsto MF + MF'$ est une ellipse*

Si $a < c$ **Alors** *la ligne de niveau $2a$ associée à l'application $M \mapsto |MF - MF'|$ est une hyperbole*

Toutes deux ont (FF') pour axe focal, $e = \frac{c}{a}$ pour excentricité et F (mais aussi F') pour foyer.
Le réel a s'appelle demi-axe focal ♣



Remarque 8.2.1 *O est un centre de symétrie pour ces deux coniques.*
On note A et A' les points de (FF') symétriques par rapport à O et tels que $AA' = 2a$.

L'axe Δ passant par O et orthogonal à l'axe focal est axe de symétrie pour ces deux coniques.

Les directrices sont les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles à Δ est distant de celle-ci de $\frac{a^2}{c}$ $*$

Remarque 8.2.2 (Caractéristiques de l'ellipse $\mathcal{E} := \{M \in \mathcal{P} | \quad MF + MF' = 2a\}$)
Soit b tel que

$$0 < b < a \qquad \text{et} \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

i.e. $c^2 = e^2 a^2$ et $p = \frac{b^2}{a}$
On note B et B' les points de (FF') symétriques par rapport à O et tels que $BB' = 2b$
Grand axe : (OA) *Demi- grand axe : a*
Petit axe : (OB) *Demi-petit axe : b*
Sommets : A, B, A', B' $*$

Remarque 8.2.3 (Caractéristiques de l'hyperbole $\mathcal{H} := \{M \in \mathcal{P} | \quad |MF - MF'| = 2a\}$)
Soit b tel que

$$c^2 = a^2 + b^2 = e^2 a^2 \qquad \text{et} \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

Demi-axe focal : a
Sommets : A, A' $*$

8.3 Equations Réduites et Paramétriques

Soient F, F' deux points distincts et $a > 0$ fixés. Soit O milieu de $[FF']$ et Δ la droite orthogonale à (FF') et passant par O.
Notons $\mathcal{R}_0$ le repère orthonormal de centre O et dont le premier vecteur dirige (FF') et le deuxième dirige Δ.

Dans ce repère on note : $F(c, 0)$, $A(a, 0)$ et $\mathcal{D}\colon x = \frac{a^2}{c}$

Proposition 8.3.1 (Ellipse)
l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F, F' et demi-grand axe a admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}_0$:

$$(E_R) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où b est défini par $\quad 0 < b < a \quad$ *et* $\quad a^2 = b^2 + c^2$

♣

Proposition 8.3.2 (Hyperbole)
l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F, F' et demi-axe focal a admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}_0$:

$$(H_R) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $c^2 = a^2 + b^2$ ♣

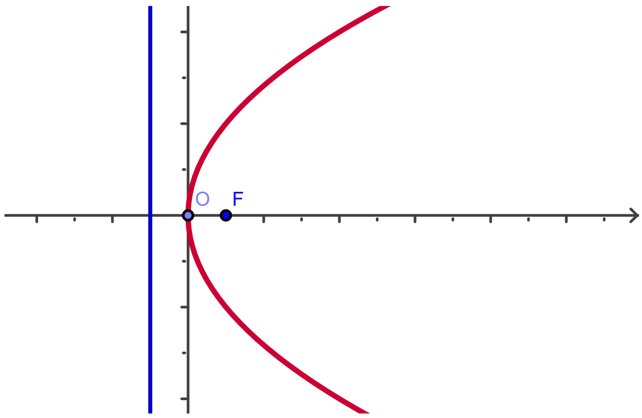
Proposition 8.3.3 (Parabole)
Soit $\mathcal{P}a$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Notons p sont paramètre.
Choisissons un repère orthonormé où :

$$F(p/2, 0) \quad \text{et} \quad D : x = -p/2$$

Alors $\mathcal{P}a$ admet pour équation cartésienne relativement à ce repère

$$(P_R) \qquad y^2 = 2px$$

♣



Proposition 8.3.4
Soit $\mathcal{R}$ un r.o.n. les ensembles dont les équations s'écrivent relativement à ce repère sont :
. (E_R) *(resp.* (H_R) *resp.* (P_R)*)* *correspondent à*
l'ellipse de foyer $F(c, 0)$ et de directrice $\mathcal{D}\colon x = \frac{a^2}{c}$ avec $a^2 = b^2 + c^2$.
resp. l'hyperbole de foyer $F(c, 0)$ et de directrice $\mathcal{D}\colon x = \frac{a^2}{c}$ avec $c^2 = a^2 + b^2$.
resp. La parabole de foyer $F(p/2, 0)$ et de directrice $\mathcal{D}\colon x = -\frac{p}{2}$ ♣

Corollaire 8.3.5 *Ces trois équations réduites sont équivalentes aux équations paramétriques suivantes*

pour l'ellipse $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\sin t \end{array} \right. \qquad t \in]-\pi, \pi]$

pour l'hyperbole $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \varepsilon a cht \\ y & = & bsht \end{array} \right. \qquad (\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$

pour la parabole $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t^2 \\ y & = & \sqrt{2p}\,t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$ ♣

Remarque 8.3.1 *l'hyperbole ci-dessus admet pour équation paramétrique*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ y & = & \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \end{array} \right. \qquad u \in \mathbb{R}^*$$

*

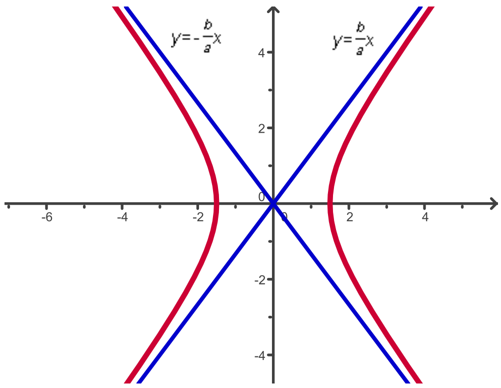
8.4 Asymptotes et Tangentes

Proposition 8.4.1 *la parabole admet une branche parabolique dans la direction de l'axe focal*

l'hyperbole d'équation (voir équations paramétrées) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *admet pour asymptotes :*

$$\Delta : y = \frac{b}{a}x \qquad \text{et} \qquad \Delta' : y = -\frac{b}{a}x$$

♣



Remarque: lorsque les asymptotes sont orthogonales (i.e. $|b| = |a|$) on parle d'hyperbole quadrilatère. Il s'agit des hyperboles d'excentricité $e = \sqrt{2}$

Proposition 8.4.2 *La tangente au point* $M_0(x_0, y_0)$ *à :*
l'ellipse d'équation réduite (dans un r.o.n.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *admet pour équation*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

resp. l'hyperbole d'équation réduite (dans un r.o.n.) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *admet pour équation*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

resp. la parabole d'équation réduite (dans un r.o.n.) $y^2 = 2px$ *admet pour équation*

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

♣

Remarque: Comme pour la tangente à un cercle il suffit de dédoubler les facteurs intervenant les équations réduites de la conique.

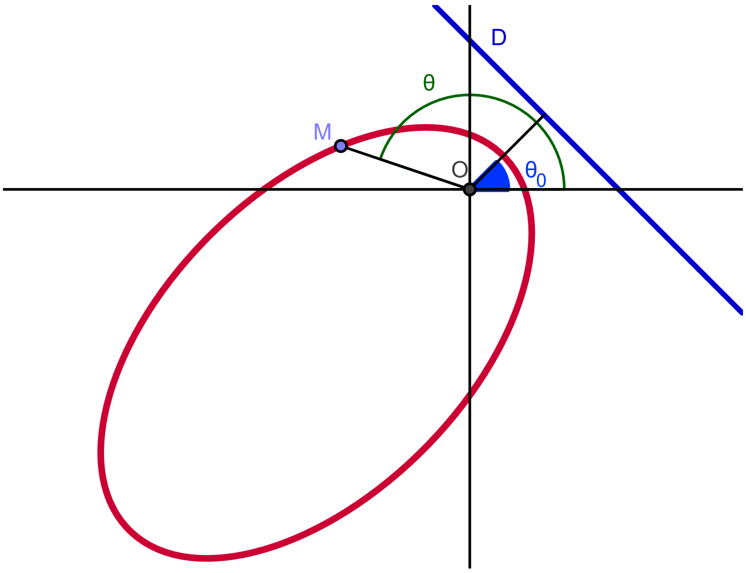
8.5 Equation Polaire

Soit $\mathcal{R}_\theta(0, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ un repère polaire relativement au r.on.d. $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Proposition 8.5.1 *Toute conique de foyer* O *et de directrice* $\mathcal{D} : \rho = \frac{h}{\cos(\theta - \theta_0)}$ *avec* $h = d(O, \mathcal{D})$ *et* $\theta_0 \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathcal{D}}}) + \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ *(*θ_0 *est la direction d'une normale à* $\mathcal{D}$*) admet pour équation polaire*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

où $p = eh$ *est la paramètre de la conique, et* e *son excentricité.*
Réciproquement, toute équation de ce type correspond à la conique caractérisée ci-dessus ♣



Remarque: par les formules d'additivité du cosinus, on comme forme générale des équations polaires des coniques :

$$\rho = \frac{p}{1 + \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$$

Remarque: la tangente en $M(\theta)$ à la conique dont l'équation polaire est $\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ admet pour équation cartésienne relativement à $\mathcal{R}$

$$x(e + \cos\theta) + y\sin\theta = p$$

8.6 Images d'un Cercle

Proposition 8.6.1 *Dans un r.o.n. l'image du cercle Γ d'équation : $x^2 + y^2 = a^2$ par l'affinité*

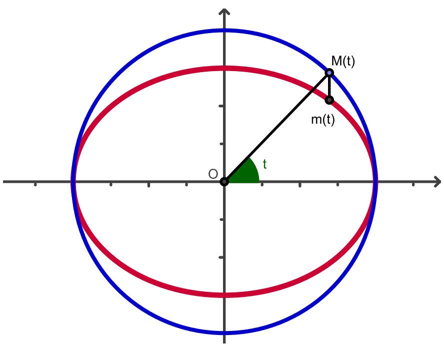
$$\mathcal{A} : M(x, y) \mapsto m(x, \frac{b}{a}y)$$

est l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
Γ est ce qu'on appelle le cercle principal de $\mathcal{E}$ ♣

Remarque 8.6.1 *Le point $m(t)$ de $\mathcal{E}$ correspondant au paramètre t dans le paramétrage :*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in]-\pi, \pi]$$

est l'image $\mathcal{A}(M)$ du point M du cercle principal d'angle polaire t.
t est ce qu'on appelle l'anomalie excentrique de m *



Remarque 8.6.2 *l'image de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point M par l'affinité $\mathcal{A}$ est la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point $\mathcal{A}(M)$* $*$

Proposition 8.6.2 *l'image d'un cercle du plan $\mathcal{P}_1$ de l'espace par la projection orthogonale sur un plan $\mathcal{P}_2$ non orthogonal au premier, est une ellipse tracée sur $\mathcal{P}_2$* ♣

8.7 Equations polynômiales de deux variables de degré 2

Proposition 8.7.1 *Toute conique admet dans un repère orthonormé une équation du type*

$$(E) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ (non simultanément nuls) ♣

Remarque 8.7.1 *les expressions du type*

$$P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ sont appelles polynômiales de degré 2 en (x, y).
Et dans ce cas la quantité $\Lambda := B^2 - AC$ est ce qu'on appelle le discriminant réduit de P.
Les coniques admettent pour équation dans n'importe quel repère.

$$Q(x, y) = 0$$

avec Q polynômial de degré 2 en (x, y). $*$

Remarque: Quitte à changer de repère orthonormé, on peut supposer $B = 0$ dans (E)
i.e. l'équation devient $A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$ avec $(A', C') \neq (0, 0)$

Proposition 8.7.2 *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'équation (E) dans un repère orthonormé, on note $\Lambda := B^2 - AC$ le discriminant réduit associé*

Si $\Lambda < 0$ **Alors** $\mathcal{C}$ *est une ellipse*
Si $\Lambda > 0$ **Alors** $\mathcal{C}$ *est une hyperbole*
Si $\Lambda = 0$ **Alors** $\mathcal{C}$ *est une parabole* ♣

Remarque 8.7.2 *Dans le cas d'une conique à centre (hyperbole ou ellipse) d'équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*

$$F(x, y) = 0$$

avec F polynômiale de degré 2, le centre Ω admet pour coordonnées le couple (x_0, y_0) solution du système de CRAMER

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

$*$

Remarque 8.7.3 *Si $\mathcal{C}$ est une conique d'équation (E) dans un r.o.n. alors la tangente en (x_0, y_0) admet pour équation*

$$Ax_0x + B(xy_0 + x_0y) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$$

Il s'agit de l'équation de (E) dédoublée $*$