Table des matières

Chapitre 9

Suites de Nombre réels

9.1 Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Le corps des réels $\mathbb{R}$ et sa relation d'ordre usuelle, sont supposées connues.

9.1.1 Propriété de la borne supérieure

Exercice: Montrer que $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leq 2\}$ est un ensemble borné qui n'admet pas de borne supérieure dans $(\mathbb{Q}, \leq)$

Preuve Cela revient à montrer que l'ensemble des majorants $A = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, x^2 \geq 2\}$ n'a pas de plus petit élément.

Soit $r := \frac{p}{q} \in A$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Si par l'absurde c'est le plus petit élément de A alors $\frac{p-1}{q} \notin A$ i.e.

$$\frac{p-1}{q}^{2} < 2 \qquad \text{d'où} \quad r^2 - \frac{2r}{q} \leq r^2 - \frac{2r}{q} + \frac{1}{q^2} < 2$$

Soit puisque $r^2 \leq 2$ et que $r^2 \neq 2$ car $r \in \mathbb{Q}$

$$q < \frac{2r}{r^2 - 2}$$

ce qui est absurde puisque l'écriture fractionnaire de r $\frac{p}{q}$ n'est pas unique et que l'on peut choisir le dénominateur q aussi grand que l'on souhaite (quitte à multiplier numérateur et dénominateur par un même facteur entier) $\bullet$

Théorème 9.1.1 (Propriété de la Borne Supérieure) *Tout sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure.* ♣

Exemple: $\{x \in \mathbb{Q}; \quad x^2 \leq 2\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on la note $\sqrt{2}$ et d'après ce qui précède $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ce qui montre que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est non vide... et donc infini puisque $\sqrt{2}\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Corollaire 9.1.2 *Tout sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure* ♣

Preuve Soit A une partie non vide minoré de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x \mid x \in A\}$$

$-A$ et donc non vide et majoré, soit M sa borne supérieure, par définition

$$\begin{cases} \forall y \in -A, \quad y \leq M \\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists b \in -A, \quad M - \epsilon < b \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{cases} \forall x \in A, \quad -x \leq M \\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists a \in A, \quad M - \epsilon < -a \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \forall x \in A, \quad -M \leq x \\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists a \in A, \quad a < -M + \epsilon \end{cases}$$

Et donc $-M = \inf A$ •

Remarque 9.1.1 *Par convention, on notera* $\sup A = +\infty$ *dans le cas où* A *est non vide et n'admet pas de borne supérieure.*
Et on notera $\inf A = -\infty$ *dans le cas où* A *est non vide et n'admet pas de borne inférieure.*

Ainsi l'expression $\sup A = M$ *signifie deux choses, la première est que* A *admet une borne supérieure, et la deuxième est que cette borne supérieure vaut* M*.* ∗

9.1.2 Droite numérique achevé

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, on l'appelle $\mathbb{R}$ achevé.
On étend la relation d'ordre usuelle à $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall \omega \in \bar{\mathbb{R}}, \qquad -\infty \leq \omega \leq +\infty$$

$(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$ est donc totalement ordonné.

contrairement à $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ n'a pas de structure algébrique particulière, mais peut cependant étendre partiellement les lois additives et mulitplicatives et leurs symétriques respectifs en posant pour tout $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}$

$\alpha + \beta$

$\alpha \setminus \beta$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\alpha \cdot \beta$

$\alpha \setminus \beta$	0	$b > 0$	$b < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$a > 0$	0	ab	ab	$+\infty$	$-\infty$
$a < 0$	0	ab	ab	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$1/\alpha$

α	$1/\alpha$
0	FI
$a \neq 0$	$1/a$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Exercice: Montrer que pour tout intervalle $I := <\alpha, \beta>$ non vide avec $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, on a

$$\sup I = \beta \qquad \inf I = \alpha$$

Exercice: Montrer que les applications $\sup : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $\inf : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont compatibles avec l'addition et le produit par une constante strictement positive.
Montrer que

$$\forall A \neq \emptyset, \qquad \inf A = -\sup(-A)$$

9.1.3 Relation d'ordre et opérations algébriques

La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ est totale et compatible avec les opérations algébriques usuelles. On dit que $\mathbb{R}$ est un corps complètement ordonné. On résume ici ces règles de compatibilité :

Règle No 1
$\leq$ est stable par addition d'une constante :
Quels que soient $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

Règle No 1bis
$\leq$ est stable par addition :
Quels que soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ccc} a & \leq & b \\ c & \leq & d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

Règle No 2
$\leq$ est inversé par changement de signe :
Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$$

Règle No 3
$\leq$ est stable par multiplication d'une constante **positive** :
Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \geq 0$:

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

Règle No 3bis
$\leq$ est stable par multiplication membre à membre de quantités **positives** :
Quels que soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \leq & a & \leq & b \\ \mathbf{0} & \leq & c & \leq & d \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{0} \leq a \cdot c \leq b \cdot d$$

Règle No 4
$\leq$ est inversé par passage à l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:
Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbf{0} < a \leq b \Rightarrow \mathbf{0} < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

Proposition 9.1.3 *Montrer que les règles 1 et 3 engendrent les quatre autres* ♣

Preuve Règle 1bis : $a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$ et $c \leq d \Longrightarrow b + c \leq b + d$ On conclut par transitivité

Règle2 : $a \leq b \Longrightarrow a + (-a - b) \geq b + (-a - b)$ CQFD

Règle3bis On a $c \geq 0$ d'où $0 \leq ac \leq bc$.
De même $b \geq 0$ (transitivité) d'où $bc \leq bd$ On conclut par transitivité

Règle 4 $a > 0$ si par l'absurde $1/a \leq 0$ alors $1 = a \times \frac{1}{a} \leq 0$ absurde (pourquoi ?). Donc $1/a > 0$ de même $1/b > 0$.
Si par l'absurde $1/a \leq 1/b$ en multipliant par $ab \geq 0$ (pourquoi ?) on aurait $b < a$ absurde... CQFD

•

Exercice: Ecrire les règles analogues pour la relation d'ordre strict $<$ définie par

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y)$$

Exercice: On montre que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad x \leq y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$$

Pour la réciproque étudier le signe de $\frac{y^2 - x^2}{y - x} = y - x$

9.1.4 La valeur absolue... Une distance

Etant donné que parmi les nombres réels, ceux qui sont positifs semblent être assez particuliers, nous allons définir une nouvelle fonction sur $\mathbb{R}$ notée $|\cdot|$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exercice: Tracer le graphe de cette fonction.

Question: Montrer que $\sqrt{x^2} = |x|$. Qu'en est-il pour $(\sqrt{x})^2$?

On vérifie aisément les propriétés suivantes ($x, y \in \mathbb{R}$ et $m \geq 0$)

$$|-x| = |x| \qquad |xy| = |x||y|$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$$

Exercice: Les vérifier.

Mais une des propriétés fondamentales est la suivante

Proposition 9.1.4 (Inégalité Triangulaire) *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

avec égalité uniquement dans le cas où x et y sont de même signe. ♣

Preuve

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy| = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

On conclut grâce à la croissance de la fonction racine carrée. Le cas d'égalité, venant d'après les calculs ci-dessus que si $xy = |xy|$, d'où la conclusion •

Remarque: On étend cette propriété aux sommes finies de nombres réels.

On en déduit directement

Proposition 9.1.5 *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

Dans la pratique on écrit

$$|y| - |x| \leq |x - y| \qquad \text{et} \qquad |x| - |y| \leq |x - y|$$

♣

Preuve Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire à

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

On en déduit $|x| - |y| \leq |x - y|$, en échangeant les rôles de x et y, on en déduit :

$$|y| - |x| \leq |x - y|$$

CQFD •

On retiendra donc que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

L'inégalité triangulaire justifie son nom du fait que la valeur absolue est sous-jacente à une distance. Posons pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|$$

Cette fonction positive vérifie clairement les trois propriétés suivantes ($x, y, z \in \mathbb{R}$) :

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

– $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
– $d(x, y) = d(y, x)$
– $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
C'est ce qu'on appelle une distance.

La dernière propriété découle directement de l'inégalité triangulaire (elle est équivalente). C'est une inégalité triangulaire puisque, comme dans le triangle, la distance qui sépare deux sommets (x et z) est plus petite que la distance parcourue lorsque l'on joint ces deux sommets en passant par le troisième (y) (En bref le plus court trajet entre deux points, c'est la ligne droite)

9.1.5 Rappels sur les intervalles

VOIR FICHE Fonctions

On apelle segment tout intervalle fermé borné.

Remarque: De facon analogue à $\mathbb{C}$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x - x_0| < h \Longleftrightarrow x \in]x_0 - h, x_0 + h[\qquad \text{et} \qquad |x - x_0| \leq h \Longleftrightarrow x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Ainsi $]x_0 - h, x_0 + h[$ (resp. $[x_0 - h, x_0 + h]$) est l'équivalent du disque ouvert (resp. fermé) de centre x_0 et de rayon h

l'intervalle du type $< x_0 - h, x_0 + h >$ est appelé intervallé centré en x_0 et de longueur $2h$

9.1.6 Corps archimédien

Proposition 9.1.6 $\mathbb{R}$ *est archimédien, c'est à dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}; \qquad nx \geq y$$

♣

Preuve
Supposons par l'absurde que

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad nx < y$$

Alors $A := \{nx|\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majoré de $\mathbb{R}$, notons M sa borne supérieure. Par construction il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$M - x < nx \quad \text{d'où } M < (n+1)x$$

or $(n+1)x \in A$ d'où par construction $(n+1)x \leq M$.. contradiction •

Remarque: la propriété d'Archimède est équivalente à

$$(*) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}; \qquad n \geq y$$

ou encore à

$$(**) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*; \qquad nx \geq 1$$

Preuve Le caractère archimédien implique ces deux assertions c'est évident.
Réciproquement. supposons (*) réalisé, alors Soient $x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}$ fixés, puisque $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ on a d'après $(*)$

$$\exists n \in \mathbb{N}; \quad n \geq \frac{y}{x}$$

CQFD.

De même, supposons (**) réalisé, alors Soient $x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}$ fixés.
1er cas : $y \leq 0$. alors $1 \times x \geq 0 \geq y$
2eme cas : $y > 0$ alors $\frac{x}{y} > 0$ et donc d'après $(**)$

$$\exists n \in \mathbb{N}; \quad n\frac{x}{y} \geq 1$$

CQFD. •

La propriété d'Archimède a pour conséquence :

Définition 9.1.1 *La fonction partie entière Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ qui vérifie la propriété suivante :*

$$n \leq x < n + 1$$

En fait n est le plus grand entier approchant x par valeurs inférieures :

$$E(x) = max\{n \in \mathbb{Z}; \quad n \leq x\}$$

♠

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque et posons $A := \{p \in \mathbb{Z} | p \leq x\}$
Existence.
On a alors pour un certain $N \in \mathbb{N}$, on a $|x| \leq N$ de même et donc A est une partie non vide (contient $-N$) de $\mathbb{Z}$ et majorée (par N), il admet donc un plus grand élément n. puisque $n \in A$ on a $n \leq x$. Si par l'absurde $n + 1 \leq x$ alors $n + 1 \in A$ et donc $n + 1 \leq n$ absurde.

Unicité.
Si $n, m \in \mathbb{Z}$ vérifient $n \leq x < n + 1$ et $m \leq x < m + 1$. alors $n \leq x < m + 1$ et $m \leq x < n + 1$ d'où $n < m + 1$ et $m < n + 1$ d'où s'agissant d'entiers relatifs $n \leq m$ et $m \leq n$ soit $n = m$ •

On note $E(x) = n$, on définit ainsi une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs sur $\mathbb{Z}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad E(x) = n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} n \leq & x & < n + 1 \\ n & \in & \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Exercice Tracer le graphe de cette fonction.

Proposition 9.1.7 *Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. on a alors la décomposition suivant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!(n, r) \in \mathbb{Z} \times [0, b[; \qquad x = nb + r$$

On dit alors que x et r sont congrus modulo b.
Plus particulièrement, dans la décomposition $x = nb + r$, on a $n = E(\frac{x}{b})$.
Et lorsque $b = 1$, r est ce qu'on appelle la partie fractionnaire de x. ♣

Preuve Soient $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.
Existence :
Posons $n = E(\frac{x}{b})$ et $r = x - nb$ alors

$$x = nb + r \qquad \text{et} \qquad n \leq \frac{x}{b} < n + 1$$

Soit

$$nb \leq x < nb + b$$

i.e. $0 \leq x - nb < b$

Unicité :
Soient (n', r') un deuxième couple

$$nb + r = x = n'b + r' \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r, r' < b$$

D'où

$$n = E(n + \frac{r}{b}) = E(\frac{x}{b}) = E(n' + \frac{r'}{b}) = n'$$

Et donc

$$r = x - nb = x - n'b = r'$$

•

Définition 9.1.2 *On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$* ♠

Remarque: $\mathcal{D}$ est stable par addition, soustraction et multiplication et on a

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Définition 9.1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, et posons $p_n = E(10^n x)$.*
les décimaux $\frac{p_n}{10^n}$ et $\frac{p_n+1}{10^n}$ sont appelés respectivement valeur décimale approchées par défaut et par excès elles vérifient :

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}$$

♠

Proposition 9.1.8 *tout intervalle non vide $]a, b[$ rencontre $\mathbb{Q}$ et son complémentaire.*
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ ♣

Preuve $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
D'après Archimède puisque $b - a > 0$ on a pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$ on a $q(b-a) > 1$ (on a dilaté l'intervalle initial en l'intervalle $]qa, qb[$ qui est de longueur supérieure à 1 on va pouvoir y trouver un entier) Posons $p = E(qa)$ on a alors

$$0 < \frac{1}{q} < b - a \qquad \text{et} \qquad p \leq qa < p + 1$$

D'où

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

soit

$$a < \frac{p+1}{q} \quad \text{et} \quad \frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b$$

et donc le rationnel $\frac{p+1}{q}$ convient

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
En effet D'après ce qui précède il existe un rationnel r dans l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$ et donc l'irrationnel $r\sqrt{2}$ convient. •

Corollaire 9.1.9 *Tout intervalle $]a, b[$ non vide contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.* ♣

Preuve Supposons par l'absurde $]a, b[\cap \mathbb{Q}$ fini. soit m sa plus petite valeur. mais alors $]a, m[$ est non vide et contient d'après ce qui précède un rationnel r qui vérifie

$$r \in]a, b[\qquad \text{et} \qquad r < m$$

absurde.
Preuve similaire pour les irrationnels. •

9.2 Généralités sur les suites

9.2.1 Suites - Suites extraites

Définition 9.2.1 *On appelle suite de nombre réels la donnée d'une famille $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels u_n indexée par des entiers $n \in \mathbb{N}$. Cette notion est équivalente à la donnée d'une application :*

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

♠

De toute suite, on peut extraire des éléments, quand ces éléments sont rangés par indices croissants (en nombre infini), on parle alors de suite extraite

Définition 9.2.2 (Suite extraite)
Soit u une suite de réels, on dit que v est une suite extraite (ou sous-suite) de u, lorsque

$$v = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On note parfois $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ pour désigner v, où $n_k = \phi(k)$ ♠

Exemple: les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+7})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma(n)$ désigne le $n-$ième nombre premier, sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque 9.2.1 *On sera amené à considérer des suites définies uniquement à partir d'un certain rang (apcr) $n_0 \in \mathbb{N}$. Ainsi on désignera par $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite extraite $u_{.+n_0} = (u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi(n) = n + n_0$. De même toute propriété sera dite apcr pour la suite u, si elle est vraie pour un certaine sous-suite $u_{.+n_0}$.*

$$\text{"}u \text{ vérifie } \mathcal{P} \text{ apcr"} \qquad \text{signifie} \qquad \text{"}\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ u_n \text{ vérifie } \mathcal{P}\text{"}$$

∗

Remarque: **Si** u verifie $\mathcal{P}$ apcr et u vérifie $\mathcal{Q}$ apcr **Alors** u vérifie $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ apcr

9.2.2 Suites Monotones - Suites bornées

L'une des premières informations que l'on peut tirer d'une suite, est son comportement vis à vis de la relation d'ordre. Ainsi on a :

Définition 9.2.3 (Suites monotones) *Soit u une suite réelle. On dit que u est croissante, lorsque les valeurs prises par u_n sont rangées dans l'ordre croissant des valeurs de n, c.a.d :*

$$\begin{aligned} u \text{ est croissante} &\iff \Big(\forall m, n \in \mathbb{N},\ \ m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n\Big) \\ &\iff \Big(\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq u_{n+1}\Big) \end{aligned}$$

lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement croissante.

En revanche, lorsque les valeurs de u sont rangées dans l'ordre décroissant des valeurs de n, on dira que u est décroissante :

$$\begin{aligned} u \text{ est décroissante} &\iff \Big(\forall m, n \in \mathbb{N},\ \ m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n\Big) \\ &\iff \Big(\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geq u_{n+1}\Big) \end{aligned}$$

lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement décroissante.

Enfin toute suite u étant soit croissante soit décroissante, sera dite monotone ou strictement monotone dans le cas des inégalités strictes. ♠

Remarque 9.2.2 *Ce n'est pas parce que $u_n/u_{n+1} \leq 1$, que l'on peut affirmer que u est croissante, encore faut-il vérifier (au préalable) que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.* ∗

Définition 9.2.4 *Soit u une suite réelle et $U := \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble image de u. On dira que u est majoré (resp. minoré, resp borné) lorsque U est majoré (resp. minoré, resp borné).* ♠

Exercice: Montrez que

$$u \text{ minoré} \iff \exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N};\quad m \leq u_n$$

$$u \text{ majoré} \iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N};\quad u_n \leq M$$

$$u \text{ borné} \iff \exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N};\quad |u_n| \leq A$$

Remarque 9.2.3 *u est majoré (resp. minoré, resp borné) si et seulement si u est majoré (resp. minoré, resp borné) a.p.c.r.*
En effet les n_0 premiers termes d'une suite quelconque, forme un ensemble fini, donc borné. ∗

Question: A-t-on cette équivalence pour la monotonie ?

9.3 Limite d'une suite : Convergence

9.3.1 La Notion de Voisinage

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, tout intervalle V ouvert et centré en x_0 contient x_0 et les réels proches de ℓ, on dira que V est un voisinage de ℓ et on note $\mathcal{BV}(\ell)$ l'ensemble de ces intervalles :

$$V \in \mathcal{BV}(\ell) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Exemple: $]0,2[\in \mathcal{BV}(1)$ $\quad]\pi - 100, \pi + 100[\in \mathcal{BV}(\pi)$ $\quad$ et $\quad]0.99, 1.01[\in \mathcal{BV}(1)$

Remarque: Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés
Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ **Alors** $\quad x \in V \Longleftrightarrow |x - \ell| < \varepsilon$

Remarque: toute réunion finie ou intersection finie d'intervalles de $\mathcal{BV}(\ell)$ est encore un voisinage de ℓ

On sera amené à définir d'autres familles de voisinage :

Définition 9.3.1 (familles de voisinages) *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on définit la famille de voisinages épointés, à gauche et à droite de ℓ par*

$$V \in \dot{\mathcal{BV}}(\ell) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\setminus\{\ell\}$$

$$V \in \mathcal{BV}_g(\ell) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell, [$$

$$V \in \mathcal{BV}_d(\ell) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell, \ell + \varepsilon[$$

♠

Remarque: Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés
Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\setminus\{\ell\}$ **Alors** $\quad x \in V \Longleftrightarrow 0 < |x - \ell| < \varepsilon$
Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell[$ **Alors** $\quad x \in V \Longleftrightarrow 0 < \ell - x < \varepsilon$
Si $V =]\ell, \ell + \varepsilon[$ **Alors** $\quad x \in V \Longleftrightarrow 0 < x - \ell < \varepsilon$

A présent regardons cette notion de petitesse sur un exemple.
On a alors

Or

Lemme 9.3.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcc} a \text{ est aussi proche de } 0 \text{ que l'on veut} & \Longleftrightarrow & \text{Quel que soit le voisinage } V \text{ de } 0,\ a \in V \\ & \Longleftrightarrow & \Big(\forall V \in \mathcal{V}(0), \quad a \in V\Big) \\ & \Longleftrightarrow & \Big(\forall \epsilon > 0, \quad |a| < \epsilon\Big) \\ & \Longleftrightarrow & a = 0 \end{array}$$

♣

Preuve D'après la proposition précédente il suffit de montrer que :

$$\Big(\forall \epsilon > 0, \quad |a| < \epsilon\Big) \Longleftrightarrow a = 0$$

L'implication réciproque étant évidente, montrons l'implication directe.
On a par hypothèse

$$\forall \epsilon > 0, \quad |a| < \epsilon$$

Si par l'absurde $a \neq 0$, on aurait d'après ce qui précède en prenant $\epsilon = \frac{|a|}{2}$

$$|a| < \frac{|a|}{2}$$

Ce qui est absurde... CQFD •

Remarque 9.3.1 *Le Lemme ci-dessus nous montre que*

$$\bigcap_{V\in\mathcal{V}(0)} V = \{0\}$$

$*$

Ainsi toute suite u vérifiant

$$\textit{Quel que soit le voisinage } V \textit{ de } 0,\ u \in V$$

n'est autre que la suite nulle. En revanche si u est aussi proche de 0 apcr, la suite peut sans être nulle se "comporter à l'infini" comme la suite nulle

Il va s'agir par la suite d'étudier le la propriété :

$$\mathcal{P}(V) = \text{"}u \in V \quad apcr\text{"}$$

Où V est un certain voisinage, et u est une suite réelle.

9.3.2 Suites Convergentes

Définition 9.3.2 *On dira qu'une suite u converge vers un réel l, lorsque :*
Quel que soit le voisinage V de l la suite u est en dehors de V pour un nombre fini d'indices[1]*.*
C'est encore équivalent à dire que

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \quad u \in V \quad apcr$$

On notera

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Lorsqu'une suite u admet une limite l, on dira qu'elle est convergente. ♠

On peut reformuler cette assertion par

Proposition 9.3.2 *Soit u une suite et l un réel, on a :*

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad &\iff \quad \Big(\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N, \quad u_n \in V\Big) \\ &\iff \quad \Big(\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \epsilon\Big) \end{aligned}$$

♣

Lemme 9.3.3 *Toute suite convergente admet une unique limite.* ♣

Preuve Supposons que la suite convergente u admette deux limites distinctes l et l', on a alors grâce à la quantification des deux convergences, pour un $\epsilon > 0$ donné :

$$\big(\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1,\ |u_n - l| < \epsilon/2\big) \quad \text{et} \quad \big(\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2,\ |u_n - l'| < \epsilon/2\big)$$

En particulier pour $n = N_1 + N_2$, on a :

$$|u_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{et} \quad |u_n - l'| < \epsilon/2$$

D'où grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \epsilon$$

Et ceci quel que soit $\epsilon > 0$. D'où $l = l'$. •

Notation : grâce à ce dernier lemme, on peut introduire la notation $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou encore $\lim u = l$.

[1] Ceci n'est pas équivalent au fait que $u_n \in V$ pour une infinité d'indices

Remarque 9.3.2 *Lorsque seule u est donnée par le contexte, l'expression $\lim u = l$ signifie deux choses, la première est que u est convergente, et la deuxième est que cette limite vaut l.*
Ainsi nier non$(\lim u = l)$ n'est pas équivalent à $\lim u \neq l$. L'équivalence n'a lieu que lorsque u est convergente et l est donnée par le contexte. $*$

Exercice: Montrer l'équivalence

$$\lim u = l \Longleftrightarrow \lim |u - l| = 0$$

Exercice: Montrer que $\lim u = l \Longrightarrow \lim |u| = |l|$, Qu'en est-il de la réciproque ?

On dira qu'un suite est divergente si elle n'est pas convergente. Un cas particulier de suites divergentes sont les suites qui tendent vers l'infini :

Définition 9.3.3 (Limites infinies) *Soit u une suite réelle, on dit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) lorsque :*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N, \quad u_n > A$$

respectivement :

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N, \quad u_n < -A$$

En particulier ♠

Remarque 9.3.3 *On voit immédiatement que toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. minorée). En revanche la réciproque est fausse, puisque la suite $u_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée et pourtant elle ne tend pas vers $+\infty$.* $*$

Remarque 9.3.4 *Qu'il s'agisse de la convergence ou des limites infinies, ce sont des propriétés qui ne dépendent que du comportement apcr des suites. Ainsi quelle que soit la suite extraite $v = u_{\cdot+n_0}$, on a*

$$\lim u = L \Longleftrightarrow \lim v = L$$

Où $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $*$

9.3.3 Théorèmes de Comparaison

Il s'agit d'étudier le rapport qui existe entre limites et encadrements :

Proposition 9.3.4 *Toute suite convergente est bornée* ♣

Preuve Soit l la limite d'une suite convergente u. Comme $]l-1, l+1[\in \mathcal{V}(l)$, on sait que :

$$u_n \in]l-1, l+1[\quad apcr$$

Par ailleurs si on note N ce rang à partir duquel l'assertion ci dessus est vraie, on a, en toute généralité,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in I$$

avec $I :=]l-1, l+1[\cup \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ qui est bien évidemment borné. •

Remarque 9.3.5 *La réciproque est fausse, puisque $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente* $*$

Théorème 9.3.5 (de Comparaison) *Soient u et v deux suites* **convergentes** *et qui vérifient*

$$u_n \leq v_n \quad apcr$$

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

♣

Preuve Soit N_0 le rang à partir duquel, l'encadrement ci-dessus est vrai.
Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. v vers L), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad l - \epsilon < u_n \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad v_n < L + \epsilon$$

Et donc, pour $n = N_0 + N_1 + N_2$, on a

$$l - \epsilon < u_n \leq v_n < L + \epsilon$$

Donc on a montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad l - L < 2\varepsilon$$

On conclut alors $l - L \leq 0$ (exercice) •

Remarque 9.3.6 *Il ne faut pas croire que parce que $u_n < v_n$ apcr, on aura $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$. En effet $1/n > 0$ et pourtant le passage à la limite donne une égalité.* ∗

Corollaire 9.3.6 *Soit u une suite* **convergente** *vérifiant $u_n \leq a$ apcr pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq a$$

On a le résultat analogue pour les inégalités inverses.
En particulier, si la suite u est positive (apcr), sa limite le sera aussi. ♣

Ce corollaire admet une réciproque partielle

Lemme 9.3.7 *Si une suite u admet une limite $l > 0$, alors cette suite est strictement positive apcr. Plus précisément :*

$$u_n \geq \frac{l}{2} \qquad \textit{apcr}$$

Le résultat analogue est vrai pour $l < 0$. ♣

Preuve Posons $V :=]l/2, 3l/2[\in \mathcal{V}(l)$, on a donc par la convergence de u

$$u_n \in V \quad \textit{apcr}$$

•

9.3.4 Opérations algébriques sur les limites

Théorème 9.3.8 (Linéarité de la limite) *Soient u et v deux suites réelles, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on note $w := \lambda u + \mu v$ la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n := \lambda u_n + \mu v_n$$

Si u et v convergent, alors w converge et on a l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim_{n\to+\infty} v_n$$

♣

Preuve Par hypothèse on a

$$\forall \delta_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| < \delta_1$$

$$\forall \delta_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |v_n - L| < \delta_2$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. v vers L), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad |\lambda||u_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad |\mu||v_n - L| < \epsilon/2$$

En effet dans le cas λ nul le résultat est évident, dans le cas contraire il suffit de prendre le N_1 associé à la valeur $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2|\lambda|}$ dans la quantification ci-dessus (le raisonnement est le même pour v)

Et donc en posant $N = N_1 + N_2$, on a grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq N, \quad |(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda l + \mu L)| \leq |\lambda||u_n - l| + |\mu||v_n - L| < \epsilon$$

CQFD •

Théorème 9.3.9 (Produit) *Soient u et v deux suites réelles, on note $w := uv$ la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n := u_n v_n$$

Si u et v convergent, alors w converge et on a l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = (\lim_{n\to+\infty} u_n) \cdot (\lim_{n\to+\infty} v_n)$$

♣

Preuve On remarque que u et v étant convergentes, elles sont bornées, soit alors M un majorant de $|u|$ et $|v|$. on trouve alors grâce à l'inégalité triangulaire

$$|u_n v_n - lL| = \frac{1}{2}|(u_n - l)(v_n + L) + (u_n + l)(v_n - L)| \leq \frac{1}{2}\left[|u_n - l|(M + |L|) + (M + |l|)|v_n - L|\right]$$

Grâce à la linéarité de la limite, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[|u_n - l|(M + |L|) + (M + |l|)|v_n - L|\right] = 0$$

On conclut alors, en appliquant le théorème des gendarmes. •

Théorème 9.3.10 (Passage à l'inverse) *Soit u une suite ne s'annulant pas, on définit la suite $v := 1/u$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 1/u_n$$

Si de plus u converge vers une limite $l \neq 0$, alors, la suite v converge également, et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{l}$$

♣

Preuve Puisque u converge vers une limite $l \neq 0$, supposons par exemple $l > 0$. on a alors

$$u_n > \frac{l}{2} \quad apcr$$

Et donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{u_n - l}{u_n \cdot l}\right| \leq \frac{2}{l^2}|u_n - l| \quad apcr$$

On conclut alors grâce au théorème des gendarmes. •

Proposition 9.3.11 *Soient u et v deux suites convergeant respectivement ℓ, ℓ' dans $\bar{\mathbb{R}}$.*
Dès que ces expressions ont un sens on a :

$$\lim u + v = \lim u + \lim v \qquad et \qquad \lim u \cdot v = \lim u \cdot \lim v$$

Dans le cas contraire on parle de forme indéterminée. ♣

Exercice: le prouver

Notation : La notation $\lim u = a^+$ signifie que $\lim u = a$ et que de plus $u > a$ apcr (convention analogue pour $\lim u = a^-$)

Exercice: Montrer que :

$$\lim u = a^+ \iff \forall V \in \mathcal{V}_d(a),\ \exists N \in N,\ \forall n \geq N, \quad u_n \in V$$

Proposition 9.3.12

$$\lim 1/u$$

$\lim u$	$\lim 1/u$
0	FI
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$l \neq 0$	$1/l$
$+\infty$	0^+
$-\infty$	0^-

♣

9.4 Théorèmes d'existence de limites

9.4.1 Suites Extraites et Convergence en Moyenne de Cesaro

Proposition 9.4.1 *Toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite* ♣

Preuve La preuve repose sur un résultat préliminaire très facilement démontrable par récurrence :

Toute fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante vérifie :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geq n$

Soit alors $\epsilon > 0$, d'après la convergence de u (on notera l sa limite), on sait qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \qquad |u_n - l| < \epsilon$$

D'où, puisque dès que $k \geq N$, on a par croissance de ϕ, $\phi(k) \geq \phi(N) \geq N$, on en déduit :

$$\forall k \geq N, \qquad |u_{\phi(k)} - l| < \epsilon$$

... CQFD •

Corollaire 9.4.2 *Toute suite extraite d'une suite convergent vers* $+\infty$ *(resp* $-\infty$*), converge vers la même limite infinie.* ♣

Remarque 9.4.1 *En revanche ce n'est pas parce que une suite extraite converge que la suite de départ converge : voir* $u_n = (-1)^n$*.*
*

Cependant il existe une réciproque partielle (c'est un exercice facile)

Proposition 9.4.3 *Soit* u *une suite tel que les suites extraites :* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent toutes deux vers une même limite* $l \in \bar{\mathbb{R}}$*, on a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

♣

Corollaire 9.4.4
Si une suite u admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes alors u diverge.
Si u admet une suite extraite divergente alors u diverge.
Si u admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes (finies ou infinies) alors u diverge et n'admet pas de limite infinie. ♣

Définition 9.4.1 *Soit* u *une suite réelle et* C *sa moyenne de Cesaro, il s'agit de la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Soit $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$. **Si** $\lim C = \ell$*, on dit alors que* u *converge vers* ℓ *en moyenne de Cesaro* ♠

Exemple: la suite définie par $u_n = (-1)^n$ converge vers 0 en moyenne de Cesaro.

Proposition 9.4.5 *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, u une suite réelle et C sa moyenne de Cesaro.*

$$\textbf{Si } \lim u = \ell \textbf{ Alors } \lim C = \ell.$$

i.e. **Si** *u converge vers ℓ,* **Alors** *u converge vers ℓ en moyenne de Cesaro* ♣

Preuve Notons C_n la suite ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, d'après la convergence, on a pour un certain $N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où puisque par l'inégalité triangulaire

$$|C_n - l| = \left|\frac{(u_0 - l) + \ldots + (u_n - l)}{n+1}\right| \leq \left|\frac{(u_0 - l) + \ldots + (u_N - l)}{n+1}\right| + \left|\frac{(u_N - l) + \ldots + (u_n - l)}{n+1}\right|$$

On a

$$\forall n \geq N + N_0, \quad |C_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N + 2}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

avec N_0 tel que pour $n \geq N_0$

$$\left|\frac{(u_0 - l) + \ldots + (u_N - l)}{n+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

•

Exercice: Qu'en est-il dans le cas $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$

Remarque: Attention la réciproque est fausse. Comme nous le montre la suite $u_n = (-1)^n$

9.4.2 Théorèmes des Gendarmes

Le théorème de comparaison est un simple passage à la limite dans les inégalités, ce qui suppose que ces limites existent, le théorème suivant va nous donner un résultat d'existence de la limite :

Théorème 9.4.6 (des Gendarmes) *Soient u, v et w trois suites réelles vérifiant :*
- *$u_n \leq v_n \leq w_n$ apcr*
- *u et w convergent vers la même limite l*

On a alors

$$v \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = l$$

♣

Preuve Soit N_0 le rang à partir duquel, l'encadrement ci-dessus est vrai.
Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. w vers l), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad l - \epsilon < u_n \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad w_n < l + \epsilon$$

Et donc en posant $N = N_0 + N_1 + N_2$, on a : $\forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon$
On a donc prouvé que :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \quad l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$$

•

Dans la pratique on utilisera

Corollaire 9.4.7 *Soient u, v deux suites réelles vérifiant :*
- *$|u_n| \leq v_n$ apcr*
- $\lim v = 0$

On a alors

$$u \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

♣

On a l'équivalent pour le cas des suites convergent vers $+\infty$

Théorème 9.4.8 (des Gendarmes cas infini) *Soient u et v deux suites réelles vérifiant :*

$$u_n \leq v_n \;\; apcr \quad et \quad \lim u = +\infty$$

On a alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

♣

Et bien sûr le résultat analogue pour la limite $-\infty$ est vrai.

Exercice: prouver ces deux théorèmes.

9.4.3 Suites Monotones

Théorème 9.4.9 (Suites monotones)
Toute suite u croissante majorée est convergente, sa limite vaut :

$$\lim u = \sup_{n \in N} u_n$$

♣

Preuve Quitte à considérer $u_{\cdot + n_0}$, on peut supposer u croissante majorée. Donc l'ensemble

$$\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est un sous-ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$, soit l sa borne supérieure.
On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n \leq l \\ \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in N, \quad l - \epsilon < u_{n_0} \end{cases}$$

Comme u est croissante :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n_0} \leq u_n$$

On a donc

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in N, \;\; \forall n \geq n_0 \quad l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$$

•

Corollaire 9.4.10 *Toute suite v décroissante minorée est convergente, sa limite vaut :*

$$\lim v = \inf_{n \in N} v_n$$

♣

Question: Que peut-on dire pour une suite majorée croissante apcr ou minorée décroissante apcr ?

Remarque 9.4.2 *On peut montrer que toute suite croissante, non majorée tend vers l'infini. On a donc en toute généralité :*

$$u \;\; croissante \Longrightarrow \lim u = \sup u$$

De même :

$$v \;\; décroissante \Longrightarrow \lim v = \inf v$$

∗

Remarque 9.4.3 *En revanche ce n'est pas parce que une suite est majorée, qu'elle est convergente (cf $u_n = (-1)^n$). De même qu'il est faux de penser qu'une suite non majorée tend vers l'infini (cf $u_n = (-1)^n n$).* ∗

Proposition 9.4.11 *Soient m et M pris dans $\bar{\mathbb{R}}$*

$$\sup A = M \Longrightarrow \exists u \ \textit{ suite croissante dans } A, \quad \lim u = M$$

De même :

$$\inf A = m \Longrightarrow \exists v \ \textit{ suite décroissante dans } A, \quad \lim v = m$$

On dit alors que u (resp. v) est une suite maximisante (resp. minimisante).

♣

9.4.4 Segments Emboîtés et suites adjacentes

Définition 9.4.2 (Suites adjacentes) *Deux suites u et v sont adjacentes lorsque :*

$$\begin{cases} u \ \textit{ est croissante} \\ v \ \textit{ est décroissante} \\ \lim(u-v)=0 \end{cases}$$

♠

Théorème 9.4.12 (Suites adjacentes) *Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite* ♣

Démonstration Supposons par l'absurde que :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \qquad v_p < u_p$$

Comme u est croissante et v décroissante :

$$\forall n \geq p, \qquad v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$$

On en déduit

$$u_n - v_n \geq u_p - v_p > 0$$

D'où par passage à la limite :

$$0 \geq u_p - v_p > 0$$

ce qui est absurde. Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$$

Et donc par une récurrence immédiate, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_0 \quad \text{et} \quad u_0 \leq v_n$$

Donc d'après le théorème des suites Monotones, on en déduit que u et v convergent, leurs limites étant alors identiques puisque :

$$\lim(u-v)=0$$

•

Remarque 9.4.4 *Notons au passage, que l'on a démontré que deux suites adjacentes u et v, vérifient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$$

Où l est la limite commune ∗

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle fermé borné $I := [a,b]$ (avec $a \geq b$), on pose alors $|I| = b - a$.

Théorème 9.4.13 (Segments emboîtés) *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} \subset I_n \\ |I_n| \longrightarrow 0 \qquad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty \end{cases}$$

Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide et réduit à un point. ♣

Démonstration Posons $I_n = [a_n, b_n]$. Comme $I_{n+1} \subset I_n$, on a :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

C'est à dire (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
De plus

$$\lim(b_n - a_n) = \lim |I_n| = 0$$

Donc il s'agit de suites adjacentes, on note l leur limite commune :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq l \leq b_n$$

on a donc $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Par ailleurs si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x \leq b_n$$

D'où par passage à la limite : $l \leq x \leq l$. i.e $x = l$. D'où l'unicité. •

Exemple: Soit $I_0 = [a_0, b_0]$ un segment de longueur ℓ et x un élèment de I_0. En scindant en deux cet intervalle on obtient un intervalle I_1 de longueur $\ell/2$ qui contient x.

$$I_1 = [a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$$

En réitérant ce procède on construit une suite dichotomique d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant tous x

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

Il s'agit là d'une suite de segments emboîtés puisque $|I_n| = \frac{\ell}{2^n}$ et donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

Exercice: Partant de $I_0 = [1, 2]$ construire les intervalle I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 de la suite dichotomique d'intervalles associée à $\sqrt{2}$

solution

$$I_1 = [1, \frac{3}{2}] \quad I_2 = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \quad I_3 = [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}] \quad I_4 = [\frac{11}{8}, \frac{23}{16}] \quad \text{et} \quad I_4 = [\frac{45}{32}, \frac{23}{16}]$$

Proposition 9.4.14 *Soit D une partie de $\mathbb{R}$.*
Dire que D est dense dans $\mathbb{R}$ équivaut à dire que :

Tout réel est limite d'une suite à valeurs dans D

♣

Exercice: Preuve : • Supposons D est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in]x, x + \frac{1}{n+1}[\cap D$ x_n est bien défini par densité de D, et ainsi on construit une suit x à valeurs dans D qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \leq x_n \leq x + \frac{1}{n+1}$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes.

• Supposons que tout réel est limite d'une suite à valeurs dans D.
Soit $]a, b[$ non vide. et x à valeurs dans D tel que $\lim x = \frac{a+b}{2}$.
Soit $\varepsilon \in]0, \frac{b-a}{2}[$ quelconque, on a pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$

$$|x_N - \frac{a+b}{2}| < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$$

D'où

$$x_N \in]a, b[\cap D$$

Reformulons à présent une propriété de densité vue dans le premier chapitre

Théorème 9.4.15 (Densité) *Tout nombre réel est limite de deux suites adjacentes rationnelles.* ♣

Preuve Soit x un réel les valeurs décimales approchées par excès et par défaut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$$

définissent deux suites rationnelles adjacentes dont la limite commune est x.
En effet $\lim u - v = 0$ trivial.
Soit $y \in \mathbb{R}$

$$10 \times E(y) \leq 10y \ < E(10y) + 1 \qquad \text{et} \qquad E(10y) \leq 10y < 10 \times (E(y) + 1)$$

D'où

$$10E(y) < E(10y) + 1 \qquad \text{et} \qquad E(10y) < 10(E(y) + 1)$$

D'où s'agissant d'entiers

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 10E(y) \leq E(10y) \qquad \text{et} \qquad E(10y) + 1 \leq 10(E(y) + 1)$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x) \qquad \text{et} \qquad E(10^{n+1} x) + 1 \leq 10(E(10^n x) + 1)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leq v_n$$

•

Exercice: Montrer que l'ensemble rationnels dyadiques $\{\frac{p}{2^n} \mid \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

9.5 Relations de Comparaison

9.5.1 Définitions

Définition 9.5.1 *Soient x et y deux suites. On dit que x est dominée par y et on note*

$$x = \mathcal{O}(y) \quad \text{en } +\infty \qquad \text{ou} \qquad x_n = \mathcal{O}(y_n) \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambigüité $\qquad x_n = \mathcal{O}(y_n)$

$$\text{lorsque} \qquad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad |x| \leq M|y| \quad \text{apcr}$$

i.e. $\qquad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |x_n| \leq M|y_n|$ ♠

Remarque 9.5.1 *Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :*

$$x_n = \mathcal{O}(y_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{est bornée}$$

∗

Exemple: Toute suite bornée si et seulement si elle est dominée par 1 ainsi :

$$(-1)^n = \mathcal{O}(1) \qquad \sin(n) = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{n+1} = \mathcal{O}(1)$$

Exemple: On en déduit

$$(-n)^n = \mathcal{O}(n^n) \qquad e^n \sin(n) = \mathcal{O}(e^n) \quad \text{et} \quad \frac{n^2 - n}{n+1} = \mathcal{O}(n)$$

Exercice: Montrer que $x_n = \mathcal{O}(0)$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

Définition 9.5.2 *Soient x et y deux suites. On dit que x est négligeable devant y et on note*

$$x = o(y) \quad \textit{en } +\infty \qquad \textit{ou} \qquad x_n = o(y_n) \quad \textit{lorsque } n \to +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambigüité $\quad x_n = o(y_n)$

$$\textit{lorsque} \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad |x| \leq \varepsilon |y| \quad \textit{apcr}$$

i.e. $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |x_n| \leq \varepsilon |y_n|$
On note aussi parfois $x \ll y$ ou $x_n \ll y_n$ ♠

Remarque 9.5.2 *Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :*

$$x_n = o(y_n) \Longleftrightarrow \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

*

Exemple: Toute suite converge vers 0 si et seulement si elle est négligeable devant 1 ainsi :

$$\frac{1}{n} = o(1) \qquad \sin(\frac{1}{n}) = o(1) \quad \text{et} \quad e^{-n} = o(1)$$

Exemple: On en déduit

$$n^{n-1} = o(n^n) \qquad e^n \sin(\frac{1}{n}) = o(e^n) \quad \text{et} \quad ne^{-n} = o(n)$$

Exercice: Montrer que $x_n = o(0)$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

Définition 9.5.3 *Soient x et y deux suites. On dit que x est équivalente à y et on note*

$$x \sim y \quad \textit{en } +\infty \qquad \textit{ou} \qquad x_n \sim y_n \quad \textit{lorsque } n \to +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambigüité $\quad x_n \sim y_n$

$$\textit{lorsque } x_n - y_n = o(y_n)$$

♠

Remarque 9.5.3 *Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :*

$$x_n \sim y_n \Longleftrightarrow \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

*

Exemple: Toute suite converge vers $\ell \neq 0$ si et seulement si elle est équivalente à ℓ ainsi :

$$1 + \frac{1}{n} \sim 1 \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e \qquad \text{et} \qquad arctan(n) \sim \frac{\pi}{2}$$

Exemple: On en déduit

$$1 + n \sim n \qquad e^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e^{n+1} \qquad \text{et} \qquad n^n arctan(n) \sim \frac{\pi}{2} n^n$$

Exercice: Montrer que $x_n \sim 0$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

9.5.2 Propriétés

Lemme 9.5.1 $x = o(y) \Longrightarrow x = \mathcal{O}(y)$ ♣

Preuve

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad |x| \leq \varepsilon |y| \quad apcr) \Longrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad |x| \leq M|y| \quad apcr)$$

•

Exercice: la réciproque est-elle vraie ?

Lemme 9.5.2 Si $x \sim y$ *et* $\lim y = \ell \neq 0 \in \overline{\mathbb{R}}$ **Alors** $\lim x = \ell$ ♣

Preuve Puisque $\ell \neq 0$ on a $y \neq 0$ apcr et donc $x \sim y$ signifie $\lim \frac{x}{y} = 1$, D'où

$$\lim x = \lim y \times \frac{x}{y} = \ell \times 1$$

•

Proposition 9.5.3 *les relations $\mathcal{O}, o$ sont transitives.*
Par ailleurs

$$\begin{cases} x &= \mathcal{O}(y) \\ y &= o(z) \end{cases} \Longrightarrow x = o(z) \qquad et \qquad \begin{cases} x &= o(y) \\ y &= \mathcal{O}(z) \end{cases} \Longrightarrow x = o(z)$$

♣

Preuve Les preuves étant similaires on ne démontrera que la dernière assertion. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Puisque $y = \mathcal{O}(z$ on a $|y| < M|z|$ apcr pour un certain $M \in \mathbb{R}_+^*$.
D'où puisque $x = o(y)$ on a $|x| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y|$ apcr.
Et donc

$$|x| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y| \leq \frac{\varepsilon}{M} M|z| = \varepsilon |z| \qquad apcr$$

•

Remarque: O est réflexive , mais o ne l'est pas.

Remarque: Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :
$x = O(y) \Longleftrightarrow x = O(\lambda y) \Longleftrightarrow \lambda x = O(y)$
$x = o(y) \Longleftrightarrow x = o(\lambda y) \Longleftrightarrow \lambda x = o(y)$

Proposition 9.5.4 *la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.*
On dit qu'il s'agit d'une relation d'équivalence :
• *Réflexivité :* $x \sim x$
• *Symétrie* $x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$
• *Transitivité :* $\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \Longrightarrow x \sim z$ ♣

Preuve
• Réflexivité claire car $0 = o(x)$
• Montrons la symétrie. (une seule implication suffit).
Supposons $x \sim y$.
Soit $\varepsilon > 0$ on a

$$(*) \qquad |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y| \quad apcr \qquad \text{et} \qquad (**) \qquad |x - y| \leq \frac{1}{2}|y| \quad apcr$$

D'où d'après $(**)$

$$|y| - |x| \leq |x - y| \leq \frac{1}{2}|y| \qquad apcr$$

Et donc

$$|y| \leq 2|x| \qquad apcr$$

Et réinjectant ceci dans $(*)$
$$|y-x| = |x-y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y| \leq \varepsilon|x| \qquad apcr$$
• Montrons la transitivité
Soit $\varepsilon > 0$ On a
$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq \frac{\varepsilon}{4}|y| + \frac{\varepsilon}{2}|z| \qquad apcr$$
Or puisque $y \sim z$ on a $|y| \leq 2|z|$ apcr (voir preuve de la symétrie), d'où
$$|x-z| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| + \frac{\varepsilon}{2}|z| = \varepsilon|z| \qquad apcr$$

•

Remarque: On a vu que $x \sim y \Longrightarrow x = (y) \quad \text{et} \quad y = (x)$

Proposition 9.5.5 (Compatibilité avec le produit) *les relations $o, \mathcal{O}$ et $\sim$ sont compatibles avec le produit :*
Quels que soient les suites x, y, X, Y on a
$$[x = \mathcal{O}(X) \quad et \quad y = \mathcal{O}(Y)] \Longrightarrow xy = \mathcal{O}(XY)$$
$$[x = o(X) \quad et \quad y = o(Y)] \Longrightarrow xy = o(XY)$$
$$[x \sim X \quad et \quad y \sim Y] \Longrightarrow xy \sim XY \quad et \quad \frac{x}{y} \sim \frac{X}{Y}$$

♣

Preuve Montrons la deuxième implication (la preuve de la première étant similaire).
Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque) on a
$$|x| \leq \sqrt{\varepsilon}|X| \quad apcr \qquad \text{et} \qquad |y| \leq \sqrt{\varepsilon}|Y| \quad apcr$$
D'où
$$|xy| \leq \varepsilon|XY| \quad apcr$$

Montrons la dernière implication D'après ce qui précède, puisque Soit α la suite définie par
$$\alpha_n = \frac{x_n}{X_n} \quad \textbf{Si } X_n \neq 0 \qquad \alpha_n = 1 \textit{ sinon}$$
$$\beta_n = \frac{y_n}{Y_n} \quad \textbf{Si } Y_n \neq 0 \qquad \beta_n = 1 \textit{ sinon}$$
On a alors (puisque x et X sont simultanément nuls et de même pour y et Y)
$$x = \alpha X \qquad \text{et} \qquad y = \beta Y$$
Puisque $x \sim X$ on a $\lim \alpha = 1$. De même $\lim \beta = 1$ D'où
$$xy = \underbrace{\alpha\beta}_{\omega} XY \qquad \text{et} \qquad \lim \omega = 1$$

D'où, soit $\varepsilon > 0$ on a
$$|xy - XY| = |\omega - 1||XY| \leq \varepsilon|XY| \qquad apcr$$
On a donc montré que $xy \sim XY$

De même en supposant y (et donc Y) jamais nuls
$$\frac{x}{y} = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\chi} \frac{X}{Y} \qquad \text{et} \qquad \lim \chi = 1$$
On conclut de façon analogue que $\frac{x}{y} \sim \frac{X}{Y}$

•

Proposition 9.5.6 (Stabilité pour la somme) *les relations $o, \mathcal{O}$ sont stables pour la somme : Quels que soient les suites x, y, z on a*

$$[x = \mathcal{O}(z) \quad et \quad y = \mathcal{O}(z)] \Longrightarrow x + y = \mathcal{O}(z)$$

$$[x = o(z) \quad et \quad y = o(z)] \Longrightarrow x + y = o(z)$$

♣

Preuve Montrons la deuxième (la preuve de la première etant analogue).
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| \quad apcr \qquad \text{et} \qquad |y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| \quad apcr$$

Et donc

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| + \frac{\varepsilon}{2}|z| = \varepsilon|z| \quad apcr$$

•

Remarque: la relation $\sim$ n'est pas compatible avec la somme :

$$n + \frac{1}{n} \sim n + 1 \quad \text{et} \quad -n \sim -n \qquad \text{or } \frac{1}{n} \neq 1$$

Lemme 9.5.7 (Conservation du signe) **Si** $x \sim y$ **Alors** *x et y sont du même signe apcr.*
♣

Preuve Supposons par exemple $y > 0$ apcr. alors

$$\lim \frac{x}{y} = 1 \qquad \text{d'où } \frac{x}{y} > 0 \quad apcr$$

Et donc $x > 0$ apcr •

9.5.3 Caractérisation et Suites référence

Proposition 9.5.8 *Soit u une suite réelle telle*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

Si $\ell > 1$ **Alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$
Si $\ell < 1$ **Alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ♣

Preuve placons-nous dans le deuxième cas.
Si $\ell = 0$ le résultat est trivial, supposons donc $\ell > 0$ On a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1 - \ell}{2} \quad apcr$$

Soit pour un certain rang N on a

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - \ell \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1 - \ell}{2}$$

Posons $q = \frac{1+\ell}{2}$ on a $q \in [0, 1[$ et

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q$$

Et donc par produit télescopique

$$\forall p \geq N, \quad \left| \frac{u_p}{u_N} \right| = \prod_{n=N}^{p-1} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q^{p-N}$$

(On aurait pu obetenir cet encadrement par une simple récurrence). Et donc puisque $q^{p-N} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ on conclut grâce au théorème des gendarmes

$$\lim_{p\to+\infty} u_p = 0$$

Dans le cas $\ell > 1$ on applique le résultat que l'on vient de démontrer à la suite $1/|u|$

•

Remarque: si $\ell = 1$ on ne peut rien dire cf $u_n = (-1)^n$

Lemme 9.5.9 *Si x et y sont strictement positives et vérifient*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \textit{apcr}$$

alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ ♣

Preuve Soit N le rang à partir du quel l'encadrement est vérifié. la suite $\frac{x}{y}$ est alors décroissante positive à partir du rang N, d'où

$$|\frac{x}{y}| \leq |\frac{x_N}{y_N}| \qquad \textit{apcr}$$

D'où en posant $M = |\frac{x_N}{y_N}|$, on a

$$|\frac{x}{y}| \leq M \quad \textit{apcr}$$

•

Lemme 9.5.10 *Soit $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ et u une suite réelle.*

$$\textbf{Si} \quad u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \quad \textbf{Alors} \quad u_n \sim (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

♣

Démonstration Par convergence au sens de Cesaro on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}) = \frac{u_n^{\alpha}}{n} - \frac{u_0^{\alpha}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{\alpha}}{n} = \lambda$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{1/\alpha}} = \lambda^{1/\alpha}$$

•

Lemme 9.5.11 (Echelles de Comparaison)

$$0 < a < b \Longrightarrow a^n \ll b^n$$

$$\alpha < \alpha' \Longrightarrow n^{\alpha} \ll n^{\alpha'}$$

$$\beta < \beta' \Longrightarrow (\ln n)^{\beta} \ll (\ln n)^{\beta'}$$

♣

Preuve Il suffit de calculer les limites des quotients •

Théorème 9.5.12

$$a^n \ll n^{\alpha} \ll (\ln n)^{\beta} \ll n^{\alpha'} \ll b^n \ll n! \ll n^n$$

avec $0 < a < 1 < b \quad \beta \in \mathbb{R}^* \quad$ *et* $\quad \alpha < 0 < \alpha'$ ♣

Démonstration
• Montrons que $n^\alpha \ll (\ln n)^\beta \ll n^{\alpha'}$.
C'est le théorème de croissance comparée.
• Montrons que $n^{\alpha'} \ll b^n$.
Posons $u_n = \frac{n^{\alpha'}}{b^n} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha'} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b} \in]0,1[$$

D'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
• Montrons que $b^n \ll n!$.
Posons $u_n = \frac{b^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

• Montrons que $n! \ll n^n$.
Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/e \in]0,1[$$

D'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
• Montrons que $a^n \ll n^\alpha$
En effet $n^{-\alpha} \ll (1/a)^n$ •

9.6 Brève extension aux suites complexes

Définition 9.6.1 *On définit par extension les suites complexes comme toute famille de complexes indexée par $\mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

♠

Remarque: La notion de suite extraite est identique à celle correspondant aux suites réelles.

Remarque 9.6.1 *Les notions de suite croissante, décroissante, majorée ou minorée n'ont aucun sens s'agissant de suites complexes.* ∗

En revanche la notion de suite bornée peut-être étendue aux suites complexes ainsi :

Définition 9.6.2 *On dit qu'une suite u est bornée lorsque :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

♠

Exercice: Montrer que : u est bornée $\Longleftrightarrow$ u est bornée *apcr*

Définition 9.6.3 *Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, on dit que u converge vers ℓ et on note*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

lorsque $\lim |u - \ell| = 0$*, c'est à dire lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

♠

Remarque: vu la quantification, on retrouve facilement certaines propriétées comme l'unicité de la limite d'où la notation

$$\lim u = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Lemme 9.6.1 *Toute suite complexe convergente est bornée.* ♣

Proposition 9.6.2 *Les résultats sur les limites d'une combinaison linéaire (resp. un produit, resp. un quotient) de suites réelles convergentes s'étendent aux suites complexes convergentes.* ♣

Proposition 9.6.3 Si *u et v sont deux suites complexes telles que*

$$|u| \leq |v| \quad apcr \qquad et \qquad \lim v = 0$$

Alors $\lim u = 0$ ♣

On définit $\alpha := Re(u)$, $\beta := Im(u)$ et $v := \bar{u}$ les suites définies à partir de u par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = Re(u_n) \quad \beta_n = Im(u_n) \quad \text{et} \quad v_n := \bar{u}_n$$

Proposition 9.6.4 *Soient u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, alors*

$$\lim u = \ell \Longleftrightarrow (\lim Re(u) = Re(\ell) \quad et \quad \lim Im(u) = Im(\ell))$$

♣

Démonstration Reprenons les notations ci-dessus avec $\ell = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = \sqrt{|\alpha_n - x|^2 + |\beta_n - y|^2}$$

• Montrons $\Longrightarrow$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\alpha_n - x| \leq |u_n - \ell| \qquad \text{et} \qquad |\beta_n - y| \leq |u_n - \ell|$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes

• Montrons $\Longleftarrow$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leq \sqrt{2}(|\alpha_n - x| + |\beta_n - y|)$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes •

Corollaire 9.6.5 Si $\lim u = \ell$ **Alors** $\lim \bar{u} = \bar{\ell}$ ♣

Preuve Il suffit de regarder les limites de la partie réelle et imaginaire de u •

Remarque 9.6.2 *Une deuxième preuve des deux propostions précédentes consiste à prouver tout d'abord que* $\lim u = \lim \bar{u}$ *en passant à la limite dans l''égalité*

$$|u - \ell| = |\bar{u} - \bar{\ell}|$$

Puis par colinéarité de la limite lorsque $\lim u = \ell$

$$\lim Re(u) = \lim \frac{u + \bar{u}}{2} = \frac{\ell + \bar{\ell}}{2} = Re(\ell) \quad et \quad \lim Im(u) = \lim \frac{u - \bar{u}}{2} = \frac{\ell - \bar{\ell}}{2} = Im(\ell)$$

Et réciproquement si les limites des parties réelles et imaginaires sont telles que ci-dessus on a, par colinéarité de la limite :

$$\lim u = \lim Re(u) + iIm(u) = \lim Re(u) + i \lim Im(u)$$

*