Table des matières

Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Dans tout ce chapitre $I :=< \alpha, \beta >$ désigne un intervalle contenant au moins deux éléments (avec $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$). On pose alors $\overline{I} = [\alpha, \beta]$ (partie de $\overline{\mathbb{R}}$) Nous notons $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs réelles.

10.1 Généralités

Dans ce paragraphe nous reprenons les définitions et notations introduites dans les fiches :
- Fonctions Réelles
- Relations d'ordre

10.1.1 Opérations et Structures Algébriques

Etant données deux fonctions f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un réel λ, nous savons caractériser les fonctions

$$\lambda \cdot f \qquad f + g \qquad f \times g \qquad g \circ f \quad \text{et} \quad \frac{1}{f}$$

Plus particulièrement les lois $+$ et $\cdot$ sont une loi de composition interne et une loi de composition externe respectivement qui vérifient les propriétés suivantes

(i) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien

(ii) Distributivité par rapport à l'addition des fonctions :

$$\forall (\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \qquad \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$$

(iii) Distributivité de $\cdot$ par rapport à l'addition des scalaires

$$\forall (\lambda, \mu, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \qquad (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$$

(iv) associativité mixte $\forall (\lambda, \mu, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$

(v) le scalaire 1 est un opérateur neutre pour la multiplication $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \qquad 1 \cdot f = f$

On dit alors que $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque: l'ensemble des suites réelles est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition et le produit par un scalaire usuels.
Il en va de même pour l'ensemble des suites complexes.

Parmi les fonctions, on peut considérer celles qui sont paires, impaires ou T-périodiques (avec $T > 0$). Notons

$$\mathcal{F}_{paire}(I, \mathbb{R}) \qquad resp. \quad \mathcal{F}_{impaire}(I, \mathbb{R}) \qquad resp. \quad \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

les ensembles associés

Proposition 10.1.1 *Soit $T > 0$ fixé. $(\mathcal{F}_{paire}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ resp. $(\mathcal{F}_{impaire}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ resp. $(\mathcal{F}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (plus précisément il s'agit de sous-espaces vectoriels)* ♣

Démonstration Il suffit de montrer la stabilité par CL. •

Remarque: Supposons ici I symétrique par rapport à 0.Puisque toute fonction de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme la de deux fonctions prises dans $\mathcal{F}_{impaire}(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_{impaire}(I,\mathbb{R})$ respectivement on note

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \mathcal{F}_{paire}(I,\mathbb{R}) + \mathcal{F}_{impaire}(I,\mathbb{R})$$

Puisque de plus cette décomposition est unique on note

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \mathcal{F}_{paire}(I,\mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_{impaire}(I,\mathbb{R})$$

10.1.2 Ordre et Espace ordonné

On munit $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est muni de la relation d'ordre $\leqslant$ définie par

$$\forall (f,g) \in \Big(\mathcal{F}(I,\mathbb{R})\Big)^2, \qquad f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x))$$

Remarque 10.1.1 *l'ensemble $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\leqslant)$ n'est pas totalement ordonné.*
Par exemple $\sin$ et $\cos$ ne sont pas comparables dans $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\leqslant)$.
Ou plus généralement $\chi_{\mathbb{Q}\cap I}$ et $1/2$ ne sont pas comparables dans $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\leqslant)$. ∗

Remarque 10.1.2 *Si $J \subset I$ non vide, on note parfois $f \leq g$ sur J pour signifier*

$$\forall x \in J, \qquad f(x) \leq g(x)$$

∗

Définition 10.1.1 *Pour f,g deux fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on note $\sup(f,g)$ (resp. $\inf(f,g)$) les fonctions définies par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sup(f,g)(x) = \max(f(x),g(x)) \qquad \textit{resp.} \quad \inf(f,g)(x) \overset{def}{=} \min(f(x),g(x))$$

Il s'agit respectivement de la borne supérieure (resp. la borne inférieure)de $\{f,g\}$ dans $(\mathcal{F}(I;\mathbb{R}),\leqslant)$ ♠

Définition 10.1.2 *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on note $f^+, f^-, |f|$ les fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ définies par*

$$\forall x \in I, \qquad f^+(x) = \max(f(x),0) \quad f^-(x) = \max(-f(x),0) \quad \textit{et} \quad |f|(x) = |f(x)|$$

♠

Remarque 10.1.3 *Ces fonctions vérifient :*

$$f^+ = \sup(f,0) \qquad f^- = \sup(-f,0) \qquad \textit{et} \qquad |f| = \sup(f,-f)$$

$$0 \leqslant f^+ \qquad 0 \leqslant f^- \qquad \textit{et} \qquad 0 \leqslant |f|$$

$$f = f^+ - f^- \qquad \textit{et} \qquad |f| = f^+ + f^-$$

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \qquad \textit{et} \qquad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

∗

Nous avons déjà défini le caractère majoré, minoré et borné d'une fonction, rappelons les notations suivantes :

Définition 10.1.3 *Soit $J \subset I$ non vide et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on définit le maximum, minimum, la borne supérieure, la borne inférieure de f sur J et on note :*

$$\max_{x\in J} f(x) \overset{def}{=} \max f(J) \qquad \min_{x\in J} f(x) \overset{def}{=} \min f(J) \qquad \sup_{x\in J} f(x) \overset{def}{=} \sup f(J) \quad et \quad \inf_{x\in J} f(x) \overset{def}{=} \inf f(J)$$

On note parfois pour ces quantités $\quad \max_J f \quad \min_J f \quad \sup_J f \quad$ *et* $\quad \inf_J f$
Seules les deux dernières sont toujours définies dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$f(a) = \max_J f \iff a \in J \quad et \quad \forall x \in J, \quad f(x) \le f(a)$$

$$f(a) = \min_J f \iff a \in J \quad et \quad \forall x \in J, \quad f(x) \ge f(a)$$

$$M = \sup_J f \iff \begin{cases} \forall x \in J, \ f(x) \le M \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists a \in J, \quad M - \epsilon < f(a) \end{cases}$$

$$m = \inf_J f \iff \begin{cases} \forall x \in J, \ f(x) \ge m \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists a \in J, \quad m + \epsilon > f(a) \end{cases}$$

♠

Remarque: D'après le théorème de la borne supérieure, lorsque f est majoré sur J $\sup_J f$ est défini sur $\mathbb{R}$. Lorsque f est minoré sur J $\inf_J f$ est défini sur $\mathbb{R}$.
Ainsi ces deux quantités sont définies lorsque $f \in \mathcal{B}(J,\mathbb{R})$ ensemble des fonctions réelles bornées définies sur J.

Exercice: Montrer que $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercice: Soient f et g deux fonctions majorées sur I, montrer que

$$\sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g$$

Exercice: Calculez $\sup_{\mathbb{R}}(\cos + \sin)$

Remarque 10.1.4
Lorsque $\max_J f$ existe on dit que f admet un maximum sur J. Si de plus $f(x_M) = \max_J f$ avec $x_M \in J$, on dira que f admet $\max_J f$ pour maximum atteint en x_M.
Lorsque $\min_J f$ existe on dit que f admet un minimum sur J. Si de plus $f(x_m) = \min_J f$ avec $x_m \in J$, on dira que f admet $\min_J f$ pour minimum atteint en x_m.
On dira que f admet un extremum sur J, lorsqu'il admet un maximum ou un minimum sur J. $\ast$

Exemple: la fonction *sin* admet 1 pour maximum sur $[-2\pi, 2\pi[$ atteint en $\frac{\pi}{2}$

Remarque 10.1.5 *On sera amené à considérer des propriétés $\mathcal{P}(f)$ portant sur des fonctions f définies sur un intervalle I voisinage de x_0 (éventuellement épointé, à gauche ou à droite).*
La propriété $\mathcal{P}(f)$ sera dite vérifiée localement en x_0 lorsque

$$\exists V \in \mathcal{BV}(x_0); \qquad \mathcal{P}(f|_V)$$

ou ce qui équivaut encore à

$$\exists \alpha > 0; \quad \mathcal{P}(f|_{]}x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)$$

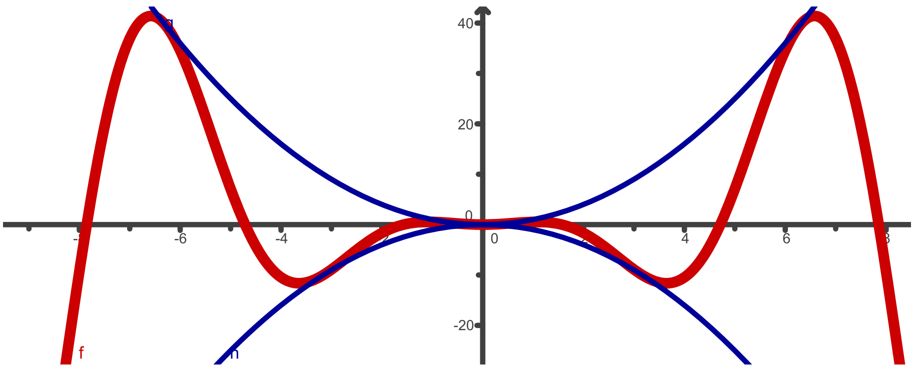
On note alors $\mathcal{P}(f)$ localement en x_0
(le cas échéant on change $\mathcal{BV}(x_0)$ par $\dot{\mathcal{BV}}(x_0)$ ou $\mathcal{BV}_g(x_0)$ ou $\mathcal{BV}_d(x_0)$) $\ast$

Exemple: soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ on dira que f admet un maximum local au voisinage de x_0, lorsque f admet un maximum sur I *localement en* x_0, i.e.
f admet un maximum sur un voisinage de x_0 inclus dans I
Ceci équivaut encore à

$$\exists \alpha > 0; \quad \exists x_M \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I; \qquad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \le f(x_M)$$

On définit de façon équivalente le minimum local au voisinage de x_0. On dira dans un cas comme dans l'autre que f admet un extremum local au voisinage de x_0

Exercice: Montrer que $f : x \mapsto x^2\cos(x)$ admet 0 pour minimum local. Admet-il un minimum global ?



Nous renvoyons aux fiches pour revoir les notions de fonction monotones et strictement monotones.

Remarque: l'ensemble des fonctions croisantes n'est pas un sous-espace vectoriel, l'ensemble des fonctions monotones

Définition 10.1.4 (Fonctions Lipschitziennes) *On note $Lip(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur I et vérifiant*

$$\exists k \in \mathbb{R}_+; \quad \forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Toute fonction f vérifiant l'inégalité

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

est dite k-lipschitzienne. ♠

Remarque: $Lip(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple: Toute fonction affine du type $x \mapsto kx+b$ est k-lipschitzienne.

Exercice: Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$

10.2 Limites

10.2.1 Définitions

Nous allons généraliser la notion de limite d'une suite, qui sont des fonctions particulières, à la notion de limite de fonction. Cette fois-ci nous aurons donc deux notions de voisinage à traiter : le voisinage du point vers lequel tend la fonction, mais aussi le voisinage du point vers lequel la variable tend.

Ainsi dans le cas des suites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{BV}(l),\ u \in V \ \ apcr$$

V désignait le premier voisinage, celui de la limite l, et apcr désignait le voisinage de $+\infty$ vers lequel tend la variable n.

Ajoutons à la famille des voisinages d'un point fixé, un nouveau type de voisinages

Définition 10.2.1 (Voisinages de l'infini) *On notera $\mathcal{BV}(+\infty)$ (resp. $\mathcal{BV}(-\infty)$) la famille de voisinages caractérisés par :*

$$V \in \mathcal{BV}(+\infty) \Longleftrightarrow \exists A > 0; \quad V =]A, +\infty[$$
$$V \in \mathcal{BV}(-\infty) \Longleftrightarrow \exists A > 0; \quad V =]-\infty, -A[$$

♠

Exercice: Montrer que

$$\lim u = l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{BV}(l),\ \exists W \in \mathcal{BV}(+\infty); \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in W \Longrightarrow u_n \in V$$

Ainsi que

$$\lim u = +\infty \iff \forall V \in \mathcal{BV}(+\infty),\ \exists W \in \mathcal{BV}(+\infty);\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \in W \Longrightarrow u_n \in V$$

On est donc amené tout naturellement à généraliser les limites au cas des fonctions ainsi

Définition 10.2.2 *Soit $x_0 \in]\alpha, \beta[$ fixé.*
On dira pour une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, que $f(x)$ tend vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$, lorsque x tend vers $x_0 \in I$ lorsque

$$\forall V \in \mathcal{BV}(\ell),\quad \exists W \in \mathcal{BV}(x_0);\quad \forall x \in I,\quad x \in W \Longrightarrow f(x) \in V$$

i.e lorsque : $\forall \epsilon > 0,\quad \exists \alpha > 0;\quad \forall x \in I,\quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$
On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ *et on dit que f est convergente en x_0.* ♠

Ainsi le jeu consiste à remplacer dans la quantification écrite en termes de voisinages, par une quantification en termes de base de voisinages.
Par exemple on remplace, $V \in \mathcal{V}(l)$ par $]l - \alpha, l + \alpha[$....

Proposition 10.2.1 *Lorsqu'elle existe, la limite est unique. D'où la notation*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad ou \qquad \lim_{x_0} f = \ell$$

♣

Preuve Supposons par l'absurde, l'existence de deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2.
Première Preuve :
on peut alors (le prouver)trouver deux voisinages $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(l_1)$ tels que :

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

D'où par quantification de la limite pour l_1 (resp. pour l_2), il existe $W_1 \in \mathcal{BV}(x_0)$ (resp. $W_2 \in \mathcal{BV}(x_0)$) tel que

$$\forall x \in W_1 \cap I,\quad f(x) \in V_1 \quad \text{respectivement} \quad \forall x \in W_2 \cap I,\quad f(x) \in V_2$$

Et donc puisque $W_1 \cap W_2 \cap I \neq \emptyset$, en prenant $x \in W_1 \cap W_2 \cap I$, on trouve

$$f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

ce qui est absurde.
Deuxième Preuve :
Posons $\varepsilon = |\frac{\ell_1 - \ell_2}{4}| > 0$ par quantification correspondant aux limites ℓ_1 et ℓ_2 respectivement on peut trouver $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in I, \qquad |x - x_0| < \alpha_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < |\frac{\ell_1 - \ell_2}{4}| \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I, \qquad |x - x_0| < \alpha_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| < |\frac{\ell_1 - \ell_2}{4}|$$

On en déduit en particulier pour z fixé quelconque tel que $|z - x_0| < \min(\alpha_1, \alpha_2)$

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(z) - \ell_1| + |f(z) - \ell_2| < |\frac{\ell_1 - \ell_2}{2}|$$

ce qui est absurde. •

Remarque: La première preuve est facilement adaptable aux autres définitions de limite que nous allons caractériser par la suite.

On peut généraliser le cas de limites finies, en des points qui ne sont pas forcément intérieurs au domaine de définition $\mathcal{D}_f$, ainsi :

Définition 10.2.3 (limites finies de fonctions) *Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$*
*** Cas d'une limite en un point fini x_0 :**
– *Si f est définie dans un voisinage épointé de x_0, on note*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l \iff & \forall V \in \mathcal{BV}(l),\ \exists W \in \dot{\mathcal{BV}}(x_0);\ \forall x \in I,\quad x \in W \Longrightarrow f(x) \in V \\ \iff & \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \end{aligned}$$

– *Si f est définie dans un voisinage à gauche de x_0, on note*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l &\iff \forall V\in\mathcal{BV}(l),\ \exists W\in\mathcal{BV}_g(x_0);\ \ \forall x\in I,\quad x\in W\Longrightarrow f(x)\in V \\ &\iff \forall\epsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \forall x\in I,\ \ 0<x_0-x<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\epsilon \end{aligned}$$

– *Si f est définie dans un voisinage à droite de x_0, on note*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l &\iff \forall V\in\mathcal{BV}(l),\ \exists W\in\mathcal{BV}_d(x_0),\ \ \forall x\in I,\quad x\in W\Longrightarrow f(x)\in V \\ &\iff \forall\epsilon>0,\ \exists\alpha>0;\ \forall x\in I,\ \ 0<x-x_0<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\epsilon \end{aligned}$$

On dit alors que f est convergente par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures). Dans tous les cas, dès que la limite existe, elle est unique.

*** Cas d'une limite en un point infini :**

– *Si f est défini dans un voisinage de $+\infty$, on note*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x)=l &\iff \forall V\in\mathcal{BV}(l),\ \exists W\in\mathcal{BV}(+\infty);\ \ \forall x\in I,\quad x\in W\Longrightarrow f(x)\in V \\ &\iff \forall\epsilon>0,\ \exists A>0;\ \forall x\in I,\ \ x>A\Rightarrow|f(x)-l|<\epsilon \end{aligned}$$

– *Si f est défini dans un voisinage de $-\infty$, on note*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x)=l &\iff \forall V\in\mathcal{BV}(l),\ \exists W\in\mathcal{BV}(-\infty);\ \ \forall x\in I,\quad x\in W\Longrightarrow f(x)\in V \\ &\iff \forall\epsilon>0,\ \exists A>0;\ \forall x\in I,\ \ x<-A\Rightarrow|f(x)-l|<\epsilon \end{aligned}$$

♠

Lemme 10.2.2 *Soit f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0, on a alors :*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=l \iff \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \quad et \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l\right)$$

♣

Démonstration

• Montrons $\Longrightarrow$.

Soit $\varepsilon>0$, par hypothèse on peut trouver $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in I,\qquad 0<|x-x_0|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

On en déduit que

$$\forall x\in I,\qquad 0<x-x_0<\alpha\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x\in I,\qquad 0<x_0-x<\alpha\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

• Montrons $\Longleftarrow$.

soit $\varepsilon>0$, on peut trouver $\alpha_+>0$ et $\alpha_->0$ tels que

$$\forall x\in I,\qquad 0<x-x_0<\alpha_+\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x\in I,\qquad 0<x_0-x<\alpha_-\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

posons $\alpha=\min(\alpha_+,\alpha_-)>0$, on en déduit

$$\forall x\in I,\qquad 0<|x-x_0|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

•

Exercice: Soit f définie en x_0, montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\Longrightarrow\ell=f(x_0)$.
Qu'en est-il lorsque $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=\ell$.

On peut également généraliser au cas des limites infinies par

Définition 10.2.4 (Limites infinies) *Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$*
Lorsque f est définie au voisinage de x_0, on peut définir la limite $+\infty$ de f en x_0 par

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty &\iff \forall V\in\mathcal{BV}(+\infty),\ \exists W\in\mathcal{BV}(x_0),\ \ \forall x\in I,\quad x\in W\Longrightarrow f(x)\in V \\ &\iff \forall A>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ \ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)>A \end{aligned}$$

Lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$, on peut aussi définir cette même limite en $+\infty$

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & \Longleftrightarrow & \forall V \in \mathcal{BV}(+\infty),\ \exists W \in \mathcal{BV}(+\infty),\ \ \forall x \in I, \quad x \in W \Longrightarrow f(x) \in V \\ & \Longleftrightarrow & \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ \ x > B \Rightarrow f(x) > A \end{array}$$

On peut également définir la notion de $\lim f = +\infty$ *et ce ceci lorsque x tend vers x_0 par valeurs différentes, à gauche, à droite... Et enfin on a les définitions analogues pour* $\lim f = -\infty$*, sachant que :*

$$\lim f = -\infty \Longleftrightarrow \lim -f = +\infty$$

♠

Exercice: Quantifier les limites manquantes.

Exercice: Montrer l'équivalence $\qquad \lim f = l \Longleftrightarrow \lim |f - l| = 0$

Lorsque le contexte permet de préciser la notion, on notera : $\qquad \lim_\lambda f = L \qquad$ voire $\lim f = L$

Proposition 10.2.3 *Soient f et g deux fonctions prenant les mêmes valeur sur un voisinage donné de $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, on a alors :*

$$\lim_\lambda f = L \Longleftrightarrow \lim_\lambda g = L$$

avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$, lim *est à prendre dans le même sens que le voisinage considéré.* ♣

Remarque 10.2.1 *Cette proposition signifie que la notion (et la valeur) de limite ne dépend que du comportement local de la fonction, c'est à dire que si on modifie f en une fonction g partout sauf en un voisinage de $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, la convergence et la limite restent inchangées.* $*$

Remarque 10.2.2 *Lorsqu'une fonction f est définie sur un intervalle J un voisinage de x_0 (resp épointé, resp. à gauche resp à droite) d'un point x_0, on note :*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in J}} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{BV}(L),\ \exists W \in \mathcal{BV}(x_0), \quad \forall x \in J, \quad x \in W \Longrightarrow f(x) \in V$$

Où $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

En d'autres termes, si on désigne par $f|_J$ la restriction de f à J, on définit ainsi

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in J}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f|_J(x) = L$$

$*$

Remarque: La proposition ci-dessous se réécrit alors :
Quel que soit $J \in \mathcal{BV}(\lambda)$, on a

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in J}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Proposition 10.2.4 *Soit f une fonction définie sur un "bon" voisinage de x_0, $\alpha > 0$ suffisamment "petit" et $L \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\setminus\{x_0\}}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = L$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in]x_0-\alpha, x_0[}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in]x_0, x_0+\alpha[}} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

♣

Exercice: le prouver

Cette nouvelle généralisation, n'est en fait qu'une réécriture des choses, on a bien sûr les mêmes propriétés vérifiées par ces limites que par les limites classiques.

Exercice: Montrer pour toutes les quantifications de limites introduites l'unicité de la limite.

Remarque 10.2.3 *L'étude des fonctions convergentes en $x_0 \in \mathbb{R}$ se ramène à l'étude de la des fonctions de limite nulle en x_0, car pour $\ell \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \ell = 0$$

De plus l'étude des fonctions convergentes en $x_0 \in \mathbb{R}$ se ramène à l'étude des fonctions convergentes en 0, puisque pour $\ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$$

*

Nous avons vu, comment la notion de limite de suite permettait d'extrapoler celle de notion de limite de fonction. En fait nous allons voir comment toute étude de limite de fonction se ramène à l'étude de limites de suites

Théorème 10.2.5 (Caractérisation séquentielle des limites) *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = \langle \alpha, \beta \rangle$.*
Soit $\lambda \in [\alpha, \beta]$ et $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in I}} f(x) = L \qquad \textit{si et seulement si}$$

Quelle que soit la suite u à valeurs dans I, convergeant vers λ, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ ♣

Démonstration
L'implication directe est une simple composition de limites :
Soit $V \in \mathcal{V}(L)$ fixé.
D'après la quantification de la limite de f, on sait qu'il existe $W \in \mathcal{V}(\lambda)$ tel que

$$\forall x \in W \cap I, \quad f(x) \in V$$

Par ailleurs puisque $W \in \mathcal{V}(\lambda)$, on a grâce à la quantification de la limite de u

$$u_n \in W \quad \textit{apcr}$$

Et comme u est à valeurs dans I

$$u_n \in W \cap I \quad \textit{apcr}$$

On a donc

$$f(u_n) \in V \quad \textit{apcr}$$

L'implication réciproque se démontre par contraposée :
On suppose que f n'admet pas L pour limite sur I, en λ. Il existe donc un voisinage $V \in \mathcal{V}(L)$ tel que :

$$\forall W \in \mathcal{V}(\lambda), \quad \exists x \in W \cap I, \quad f(x) \notin V$$

Prenons en particulier $W :=]\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}[$, il existe donc $x_n \in I$ telle que :

$$\lambda - \frac{1}{n} < x_n < \lambda + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(x_n) \notin V$$

D'où par le théorème des Gendarmes, on voit que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$. Or puisque V est un voisinage de L, jamais atteint par la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, on a donc construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I convergeant λ mais telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers L •

En modifiant légèrement la preuve, on montre que

Théorème 10.2.6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = \langle \alpha, \beta \rangle$.*
Soit $\lambda \in [\alpha, \beta]$ et $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in I}} f(x) = L \qquad \textit{si et seulement si}$$

Quelle que soit la suite u **monotone** *à valeurs dans I, convergeant vers λ, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$* ♣

Remarque 10.2.4 *la preuve de ce dernier s'appui sur le résultat suivant :*
De toute suite u convergente vers $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on peut extraire une sous-suite monotone $*$

Remarque: Grâce à cette caractérisation, on voit comment la justification de certaines propositions sur les limites de fonctions devient facile à l'aide de la caractérisation par les suites.

10.2.2 Théorèmes de Comparaison

Il s'agit d'étudier le rapport qui existe entre limites et encadrements :

Proposition 10.2.7 *Toute fonction convergente est localement bornée.* ♣

Preuve Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Supposons $\lim_{x_0} f = \ell$. On a alors par quantification de la limite

$$\forall V \in \mathcal{BV}(x_0), \quad f \in V \quad \text{localement en } x_0$$

En particulier pour $V =]\ell - 1, \ell + 1[$, on a

$$\ell - 1 < f < \ell + 1 \quad \text{localement en } x_0$$

•

Remarque 10.2.5 *Dans cette proposition il faut faire très attention au sens de la convergence et donc aussi au sens de l'expression localement.*
Ainsi la fonction $\frac{E(x)}{x}$ est certes convergente à droite en 0 (sa limite à droite vaut 0), et elle est bien bornée sur un voisinage à droite de 0 (sur $]0, 1[$ par exemple), en revanche elle n'est pas borné sur un voisinage quelconque de 0 (puisque sur tout voisinage à gauche de 0, cette fonction n'est pas bornée) $*$

Théorème 10.2.8 (de Comparaison)
Soient f et g deux fonctions **convergentes** *en $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ et qui vérifient*

$$f \leq g \quad \textit{au voisinage de } \lambda$$

On a alors :

$$\lim f \leq \lim g$$

Ceci se généralise aux limites par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures) ♣

Preuve Soit $J \in \mathcal{BV}(\lambda)$ tel que

$$\forall x \in J, \quad f(x) \leq g(x)$$

On a par définition

$$\lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in J}} f(x) = \lim_{x \to \lambda} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in J}} g(x) = \lim_{x \to \lambda} g(x) = L$$

Supposons par l'absurde que $L < \ell$ et posons alors $\varepsilon = \frac{\ell - L}{12} > 0$.
On en déduit par quantification de ces deux limites, que pour un certain voisinage W_f et un certain voisinage W_g de λ

$$\forall x \in J, \quad x \in W_f \Longrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in J, \quad x \in W_g \Longrightarrow g(x) < L + \varepsilon$$

Soit $z \in W_f \cap W_g \cap J$(Montrer que cette intersection est non vide) quelconque fixé, on en déduit

$$\ell - \varepsilon < f(z) \leq g(z) < L + \varepsilon$$

En particulier

$$0 < \ell - L < 2\varepsilon = \frac{\ell - L}{6}$$

D'où la contradiction.

Montrons la non vacuité de $W_f \cap W_g \cap J$, il suffit de réécrire ces intervalle sous forme explicites. Dans le cas $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$J =]\lambda - \alpha, \lambda + \alpha[\quad W_f =]\lambda - \beta, \lambda + \beta[\quad \text{et} \quad W_g =]\lambda - \gamma, \lambda + \gamma[\quad \text{avec } \alpha > 0,\ \beta > 0 \ et\ \gamma > 0$$

Donc si on pose $\delta = \min(\alpha, \beta, \gamma) > 0$ on a

$$W_f \cap W_g \cap J =]\lambda - \delta, \lambda + \delta[\neq \emptyset$$

Exercice: Qu'en est-il dans les cas $\lambda = +\infty$ et $\lambda = -\infty$ •

Exercice: Prouver ce théorème en passant par la caractérisation séquentielle de la limite

Remarque 10.2.6 *Il ne faut pas croire que parce que $f < g$ localement, on aura $\lim f < \lim g$. En effet $1/x > 0$ et pourtant leurs limites en $+\infty$ sont égales.* ∗

Corollaire 10.2.9 *Soit f une fonction* **convergente** *vérifiant $f \leq a$ localement pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\lim f \leq a$$

On a le résultat analogue pour les inégalités inverses.
En particulier, si la fonction f est positive (localement), sa limite le sera aussi. Ceci se généralise aux limites par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures) ♣

Ce corollaire admet une réciproque partielle

Lemme 10.2.10 *Si une fonction f admet une limite $\ell > 0$, alors cette fonction est localement strictement positive. Plus précisément :*

$$f \geq \frac{\ell}{2} \qquad \textit{localement}$$

Le résultat analogue est vrai pour $\ell < 0$. On peut conclure de façon analogue pour des limites par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures). ♣

Preuve Par quantification de la limite puisque $]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}[$, on a

$$f \in]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}[\quad \text{localement}$$

Et donc en particulier $f \geq \frac{\ell}{2}$ localement •

Le théorème de comparaison est un simple passage à la limite dans les inégalités, ce qui suppose que ces limites existent, le théorème suivant va nous donner un résultat d'existence de la limite :

Théorème 10.2.11 (des Gendarmes) *Soient f, g et h trois fonctions réelles vérifiant :*
- *$f \leq g \leq h$ localement*
- *f et h convergent vers la même limite l*

On a alors

$$g \ \textit{ est convergente} \qquad \textit{et} \quad \lim g = l$$

Ceci se généralise aux limites par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures) ♣

Preuve Soit u à valeurs dans I, convergeant vers λ. Il suffit de montrer que $g(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$
En effet puisque :

$$\lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \in I}} h(x) = l$$

On en déduit

$$(*) \qquad \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} h(u_n) = l$$

Par ailleurs puisque

$$f \leq g \leq h \quad \text{sur } I$$

On en déduit

$$(**) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$$

On conclut donc, grace aux théorèmes des gendarmes sur les suites •

Exercice: Prouver ce théorème sans passer par la caractérisation séquentielle de la limite

Corollaire 10.2.12 *Soient f, g deux fonctions réelles vérifiant :*
- $|f| \leq g$ *localement*
- $\lim g = 0$

On a alors

$$f \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim f = 0$$

Ceci se généralise aux limites par valeurs différentes (resp. inférieures, resp. supérieures) ♣

Remarque 10.2.7 *si on note $Z_\lambda(I, \mathbb{R})$ (notation non standard) l'ensemble des fonctions convergeant vers 0 en λ. On constate que $Z_\lambda(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*
Mieux encore, le dernier corollaire s'écrit alors :

$$\mathcal{B}(I, \mathbb{R}) \cdot Z_\lambda(I, \mathbb{R}) \subset Z_\lambda(I, \mathbb{R})$$

*

On a l'équivalent pour le cas des fonctions convergeant vers $+\infty$

Théorème 10.2.13 (des Gendarmes cas infini) *Soient u et v deux suites réelles vérifiant :*

$$f \leq g \text{ localement} \quad \text{et} \quad \lim f = +\infty$$

On a alors $\lim g = +\infty$ ♣

Et bien sûr le résultat analogue pour la limite $-\infty$ est vrai.

10.2.3 Opérations algébriques sur les limites

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

$\lim f + g$

$\lim f \setminus \lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim fg$

$\lim f \setminus \lim g$	0	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$l > 0$	0	ll'	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	0	ll'	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim 1/f$

$\lim f$	$\lim 1/f$
0	FI
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$l \neq 0$	$1/l$
$+\infty$	0^+
$-\infty$	0^-

Notation : La notation $\lim f = a^+$ signifie que $\lim f = a$ et que de plus $f > a$ localement (convention analogue pour $\lim f = a^-$)

Exercice: Montrer que :

$$\lim_{\lambda} f = a^+ \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_d(a),\ \exists W \in \mathcal{V}(\lambda),\ \ \forall x \in I, \qquad x \in W \Longrightarrow f(x) \in V$$

Proposition 10.2.14 (Composition de Limites) *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions telles que :*

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Soient $\omega, \lambda, L \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que f est défini au voisnage de ω et g est défini au voisinage de λ

$$\textbf{Si} \qquad \begin{cases} \lim_\omega f = \lambda \\ \lim_\lambda g = L \end{cases} \qquad \textbf{Alors} \quad \lim_{\omega} g \circ f = L$$

♣

Démonstration Soit $V \in \mathcal{V}(L)$ fixé.
D'après la quantification de la limite de g, on sait qu'il existe $W \in \mathcal{BV}(\lambda)$ tel que

$$(*) \qquad \forall y \in J, \qquad y \in W \Longrightarrow \quad g(y) \in V \qquad \text{et} \qquad W \cap J \in \mathcal{BV}(\lambda)\ (voir\ ci-dessous)$$

En particulier

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad y \in W \cap J \Longrightarrow \quad g(y) \in V$$

Par ailleurs grâce à la quantification de la limite de f, l'existence d'un voisinage $\Omega \in \mathcal{V}(\omega)$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad x \in \Omega \Longrightarrow f(x) \in W \cap J$$

On a donc

$$\forall x \in I, \qquad x \in \Omega \Longrightarrow g(f(x)) \in V$$

CQFD
Montrons que $(*)$.
Supposons ici $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit puisque J contient un voisinage de λ que

$$]\lambda - \alpha, \lambda + \alpha[\subset J$$

On sait d'après la quantification de la limite que l'on peut trouver $\widetilde{W} =]\lambda - \beta, \lambda + \beta[$ tel que

$$\forall y \in J, \qquad y \in \widetilde{W} \Longrightarrow \quad g(y) \in V$$

On voit alors que $W =]\lambda - \gamma, \lambda + \gamma[$ avec $\gamma = \min(\alpha, \beta) > 0$ convient.
Exercice: Montrer $(*)$ dans le cas $\lambda = +\infty$ et $\lambda = -\infty$ •

Remarque 10.2.8 *Ce théorème se généralise avec précautions aux limites à gauche, à droite et par valeurs différentes.*
On a par exemple :

$$Si \qquad \begin{cases} \lim_{\omega^-} f = \lambda^+ \\ \lim_{\lambda^+} g = L \end{cases} \qquad Alors \quad \lim_{\omega^-} g \circ f = L$$

Cependant on peut avoir

$$\lim_{\substack{x \to \omega \\ x \neq \omega}} f(x) = \lambda \quad \lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \neq \lambda}} g(x) = L \qquad et \qquad \lim_{\substack{x \to \omega \\ x \neq \omega}} g \circ f(x) \neq L$$

Exemple: $f \equiv 0$ *et* $g = \chi_{\mathbb{R}^*}$ *avec* $\omega = 0$ *et* $\lambda = 0$ $*$

10.2.4 Fonctions Monotones

Enfin, on retrouve comme dans le cas des limites

Théorème 10.2.15 (Limite Monotone)
Toute fonction f croissante majorée sur un voisinage à gauche V de $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, converge, et l'on a

$$\lim_{\lambda^-} f = \sup_V f$$

De Même :
Toute fonction g décroissante minorée sur un voisinage à gauche W de $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, converge, et l'on a

$$\lim_{\lambda^-} g = \inf_W g$$

♣

Démonstration Montrons la première assertion. L'ensemble

$$\{f(x), \quad x \in V\}$$

est un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$, soit l sa borne supérieure.
On a donc :

$$\begin{cases} \forall x \in V, \;\; f(x) \leq l \\ \forall \epsilon > 0 \;\; \exists A \in V, \quad l - \epsilon < f(A) \end{cases}$$

Comme f est croissante :

$$\forall x \in V \cap [A, +\infty[, \quad l - \epsilon < f(A) \leq f(x) \leq l$$

Or $W := V \cap [A, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$ est encore un voisinage à gauche de λ. On a donc

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists W \in \mathcal{V}_g(\lambda), \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad x \in W \Rightarrow l - \epsilon < f(x) \leq l$$

La deuxième assertion en découle en appliquant la première à $f := -g$ •

Par le changement de variable $x \mapsto -x$, le théorème précédent nous donne

Corollaire 10.2.16 *Toute fonction f croissante minorée sur un voisinage à droite V de $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, converge, et l'on a*

$$\lim_{\lambda^+} f = \inf_V f$$

De même :
Toute fonction g décroissante majorée sur un voisinage à droite W de $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, converge, et l'on a

$$\lim_{\lambda^+} g = \sup_W g$$

♣

Remarque 10.2.9 *De façon générale, on peut montrer que :*

$$f \text{ croissante sur }]\alpha, \beta[\Longrightarrow \left(\lim_{\beta^-} f = \sup_{]\alpha,\beta[} f \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha^+} f = \inf_{]\alpha,\beta[} f \right)$$

De même :

$$f \text{ décroissante sur }]\alpha, \beta[\Longrightarrow \left(\lim_{\beta^-} f = \inf_{]\alpha,\beta[} f \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha^+} f = \sup_{]\alpha,\beta[} f \right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ∗

10.3 Continuité en un point

10.3.1 Définition et Propriétés

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent la notion de limite se définit grâce aux suites, nous revenons sur cette définition

Définition 10.3.1 (Continuité en un point[1]) *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dira que f est continue en x_0, lorsque l'une de ces propriétés équivalentes est réalisée*

(i) Quelle que soit la suite u à valeurs dans I et convergeant vers x_0, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

(ii)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(iii)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_0)$$

♠

Exemple: les fonctions polynômes, exponentielle, logarithme, cosinus et sinus sont continues en tout point de leurs domaines de définition.

Question: Que peut-on dire de la continuité de la valeur absolue d'une fonction continue ?

Remarque 10.3.1 *Grâce à la caractérisation de la continuité par les suites, on voit que lorsque l'on connaît une suite réelle u convergeant vers x_0, mais telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x_0)$.*

Alors f n'est pas continue en x_0

$*$

Parfois à défaut de continuité on parlera de continuité à gauche ou à droite :

Définition 10.3.2 (Continuité à gauche ou à droite) *Soit f une fonction définie sur un voisinage à droite de $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

On dira que f est continue à droite en x_0.

De même, on dira que f est continue à gauche en x_0 lorsque

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

♠

Lemme 10.3.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On a a alors :*

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0 ♣

Question: Que peut-on dire de la fonction partie Entière ?

Proposition 10.3.2 (Opérations algébriques) *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et continues en x_0 et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\lambda f + \mu g \qquad \text{et} \qquad f \cdot g$$

sont des fonctions continues en x_0.
Si de plus $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est définie au voisinage de x_0 et continue en x_0 ♣

Proposition 10.3.3 (Composition) *Soient I, J deux intervalles ouverts, f et g deux fonctions telles que :*

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Quel que soit $x_0 \in I$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } f(x_0) \end{cases} \quad \text{Alors} \quad g \circ f \text{ est continue en } x_0$$

♣

Exemple: toutes les fonctions usuelles sont des fonctions continues sur leurs domaines de définition.

Remarque: comme nous le montrent les fonctions 0 et $\chi_{\mathbb{R}^*}$ la réciproque est fausse

Remarque: Ce n'est pas parce-que deux fonctions sont continues en un même point x_0 que leur composée l'est !

10.3.2 Prolongement par Continuité

Définition 10.3.3 *Soit I un intervalle ouvert contenant un point x_0, et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On dira que f admet un prolongement par continuité en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ lorsqu'il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur I telle que*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \widetilde{f}(x) = f(x) \\ \widetilde{f} \text{ est continue en } x_0 \end{cases}$$

Bien évidemment $\mathcal{D}_{\widetilde{f}} = \mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ ♠

Proposition 10.3.4 *Avec les notations ci-dessus, lorsque f admet un prolongement par continuité, ce prolongement est unique et vérifie.*

$$\widetilde{f}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

En particulier f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si f est convergente par valeurs différentes en x_0 ♣

Exemple: La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et qui à $x \in \mathbb{R}^*$ associe $\frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, on note *sinc* ce prolongement (sinus cardinal).

Remarque 10.3.2 *Lorsque f est défini sur un voisinage à droite de x_0, on a une définition analogue du prolongement par continuité à droite $\widetilde{f}$ en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \widetilde{f}(x) = f(x) \\ \widetilde{f} \text{ est continue à droite en } x_0 \end{cases}$$

Et on a

$$\widetilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

L'analogue existe pour le prolongement à gauche. ∗

Remarque 10.3.3 *Grâce à la caractérisation de la continuité par les suites, on voit que lorsque l'on connaît deux suites réelles u et v dans $\mathcal{D}_f$, convergeant toutes deux vers la même limite x_0, mais telles que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite.*

Alors f n'est pas prolongeable par continuité en x_0

∗

Exemple: la fonction $\sin(\frac{1}{x})$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
On peut s'en convaincre en regardant les suites $\sin(\frac{1}{u_n})$ et $\sin(\frac{1}{v_n})$ avec

$$u_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$$

10.4 Relations de Comparaison

Dans cette section les fonctions considérées comme définies sur l'intervalle $I =< \alpha, \beta >$ et on considère un point $\lambda \in [\alpha, \beta]$ (rappelons que α et β sont dans $\overline{\mathbb{R}}$)

10.4.1 Définitions

Définition 10.4.1 *Soient f et g deux fonctions. On dit que f est dominée par g et on note*

$$f = \mathcal{O}(g) \quad \text{en } \lambda \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to \lambda$$

ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté $\quad f(x) = O(g(x))$

$$\text{lorsque} \qquad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad |f| \leq M|g| \quad \text{localement en } \lambda$$

i.e. $\quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists W \in \mathcal{BV}(\lambda); \quad \forall x \in I \cap W, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|$ ♠

Remarque 10.4.1 *Dans la pratique lorsque g ne s'annule jamais localement en λ :*

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ en } \lambda \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée localement en } \lambda$$

*

Exemple: Toute fonctions est localement bornée en λ si et seulement si elle est dominée par 1 en λ ainsi, en tout point :

$$\chi_{\mathbb{Q}} = \mathcal{O}(1) \qquad \sin(x) = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{x+1} = \mathcal{O}(1)$$

Exemple: On en déduit

$$\exp(x)\chi_{\mathbb{Q}}(x)) = \mathcal{O}(e^x) \qquad e^x \sin(x) = \mathcal{O}(e^x) \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - x}{x+1} = \mathcal{O}(x)$$

Exercice: Montrer que $f(x) = \mathcal{O}(0)$ en λ si et seulement si $f = 0$ localement en λ.

Définition 10.4.2 *Soient x et y deux suites. On dit que x est négligeable devant y et on note*

$$x = o(y) \quad \text{en } +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) = o(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté $\quad f(x) = o(g(x))$

$$\text{lorsque} \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad |f| \leq \varepsilon|g| \quad \text{localement en } \lambda$$

i.e. $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists W \in \mathcal{BV}(\lambda); \quad \forall x \in I \cap W, \quad |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$
On note aussi parfois $x \ll y$ ou $f(x) \ll g(x)$ ♠

Remarque 10.4.2 *Dans la pratique lorsque g ne s'annule jamais localement en λ :*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ en } \lambda \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to \lambda]{} 0$$

*

Exemple: Toute fonction converge vers 0 si et seulement si elle est négligeable devant 1 ainsi en 0 :

$$x = o(1) \qquad \sin(x) = o(1) \quad \text{et} \quad e^{-1/|x|} = o(1)$$

Exemple: On en déduit en 0

$$x \ln(x) = o(\ln(x)) \qquad e^x \sin(x) = o(e^x) \quad \text{et} \quad xe^{-1/|x|} = o(x)$$

Exercice: Montrer que $f(x) = o(0)$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

Définition 10.4.3 *Soient x et y deux suites. On dit que x est équivalente à y et on note*

$$f \sim g \quad en\ \lambda \qquad ou \qquad f(x) \sim g(x) \quad lorsque\ x \to \lambda$$

ou encore losqu'il n'y a pas d'ambigüité $\qquad f(x) \sim g(x)$

$$lorsque\ f(x) - g(x) = o(g(x))$$

♠

Remarque 10.4.3 *Dans la pratique lorsque g ne s'annule jamais localement en λ :*

$$f \sim g\ en\ \lambda \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to\lambda]{} 1$$

∗

Exemple: Toute fonction converge vers $\ell \neq 0$ en λ si et seulement si elle est équivalente à ℓ en λ ainsi en $+\infty$:

$$1 + \frac{1}{x} \sim 1 \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \sim e \qquad \text{et} \qquad arctan(x) \sim \frac{\pi}{2}$$

Et en 0

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \sim 1 \qquad \frac{\sin x}{x} \sim 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} \sim 1$$

Exemple: On en déduit en $+\infty$

$$1 + x \sim x \qquad e^x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \sim e^{x+1} \qquad \text{et} \qquad e^x arctan(x) \sim \frac{\pi}{2}e^x$$

Et en 0

$$\ln(1+x) \sim x \qquad \sin x \sim x \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Exercice: Montrer que $f \sim 0$ en λ si et seulement si $f = 0$ localement en λ.

Remarque 10.4.4 *Comme on le verra dans le chapitre dérivation, lorsqu'elle existe on note*

$$f'(\lambda) = \lim_{x\to\lambda} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda}$$

Et donc si f est dérivable en λ et $f'(\lambda) \neq 0$ on a :

$$f(x) - f(\lambda) \sim (x - \lambda)f'(\lambda) \quad en\ \lambda$$

∗

Proposition 10.4.1 *On a les équivalents suivants en* 0

$$\begin{array}{rl}
e^x - 1 \sim x & \ln(1+x) \sim x \\
\sin x \sim x & \arcsin x \sim x \\
\tan x \sim x & \arctan x \sim x \\
\sinh x \sim x & \arg\sinh x \sim x \\
x \sim x & \arg\tanh x \sim x \\
et & 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}
\end{array}$$

♣

10.4.2 Propriétés

Lemme 10.4.2 $f = o(g) \Longrightarrow f = \mathcal{O}(g)$ ♣

Exercice: la réciproque est-elle vraie ?

Lemme 10.4.3 **Si** $f \sim g$ *et* $\lim g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ **Alors** $\lim f = \ell$.
Si $\lim f = \lim g \in \mathbb{R}^*$ **Alors** $f \sim g$ ♣

Remarque: Attention **Si** $\lim f = \lim g = 0$ on n'a pas forcément $f \sim g$

$$x^2 \nsim x \quad en\ 0$$

Proposition 10.4.4 *les relations $\mathcal{O}, o$ sont transitives.*
Par ailleurs

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & \mathcal{O}(g) \\ g & = & o(h) \end{array}\right. \Longrightarrow f = o(h) \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} f & = & o(g) \\ g & = & \mathcal{O}(h) \end{array}\right. \Longrightarrow f = o(h)$$

♣

Remarque: O est réflexive , mais o ne l'est pas.

Remarque: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a :
$f = O(g) \Longleftrightarrow f = O(\alpha g) \Longleftrightarrow \alpha f = O(g)$
$f = o(g) \Longleftrightarrow f = o(\alpha g) \Longleftrightarrow \alpha f = o(g)$

Proposition 10.4.5 *la relation $\sim$ est réflefive, sgmétrique et transitive.*
On dit qu'il s'agit d'une relation d'équivalence :
- *Réflefivité :* $f \sim f$
- *Sgmétrie* $f \sim g \Longleftrightarrow g \sim f$
- *Transitivité :* $\left\{\begin{array}{lcl} f & \sim & g \\ g & \sim & z \end{array}\right. \Longrightarrow f \sim z$ ♣

Remarque: On a $f \sim g \Longrightarrow f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(f)$

Proposition 10.4.6 (Compatibilité avec le produit) *les relations $o, \mathcal{O}$ et $\sim$ sont compatibles avec le produit :*
Quels que soient les suites f, g, f, g on a

$$[f = \mathcal{O}(F) \quad et \quad g = \mathcal{O}(G)] \Longrightarrow fg = \mathcal{O}(FG)$$

$$[f = o(F) \quad et \quad g = o(G)] \Longrightarrow fg = o(FG)$$

$$[f \sim F \quad et \quad g \sim G] \Longrightarrow fg \sim FG \quad et \quad \frac{f}{g} \sim \frac{F}{G}$$

♣

Preuve Montrons la deuxième implication (la preuve de la première étant similaire).
Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque) on a

$$|f| \leq \sqrt{\varepsilon}|F| \quad localement \qquad \text{et} \qquad |g| \leq \sqrt{\varepsilon}|G| \quad localement$$

D'où

$$|fg| \leq \varepsilon|FG| \quad localement$$

Montrons la dernière implication D'après ce qui précède, puisque Soit α la fonction définie par

$$\alpha(x) = \frac{F(x)}{f(x)} \quad \textbf{Si } F(x) \neq 0 \qquad \alpha(x) = 1 \ sinon$$

$$\beta(x) = \frac{G(x)}{g(x)} \quad \textbf{Si } g(x) \neq 0 \qquad \beta(x) = 1 \textit{ sinon}$$

On a alors (puisque f et F sont simultanément nuls et de même pour g et G)

$$F = \alpha f \qquad \text{et} \qquad G = \beta g$$

Puisque $f \sim F$ on a $\lim \alpha = 1$. De même $\lim \beta = 1$ D'où

$$FG = \underbrace{\alpha\beta}_{\omega} fg \qquad \text{et} \qquad \lim \omega = 1$$

D'où, soit $\varepsilon > 0$ on a

$$|FG - fg| = |\omega - 1||fg| \leq \varepsilon |fg| \qquad \textit{localement}$$

On a donc montré que $fg \sim FG$

De même en supposant G (et donc g) jamais nul localement

$$\frac{F}{G} = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\chi} \frac{f}{g} \qquad \text{et} \qquad \lim \chi = 1$$

On conclut de façon analogue que $\frac{f}{g} \sim \frac{F}{G}$ •

Remarque 10.4.5 *Comme on l'a vu dans cette preuve, on montre facilement que*

$$\begin{array}{rllll} f = \mathcal{O}(F) \textit{ en } \lambda & \textit{si et seulement si} & f = \alpha F & \textit{avec} & \alpha \textit{ localement borné en } \lambda \\ f = o(F) \textit{ en } \lambda & \textit{si et seulement si} & f = \alpha F & \textit{avec} & \alpha(x) \xrightarrow[x \to \lambda]{} 0 \\ f \sim F \textit{ en } \lambda & \textit{si et seulement si} & f = \alpha F & \textit{avec} & \alpha(x) \xrightarrow[x \to \lambda]{} 1 \end{array}$$

∗

Proposition 10.4.7 (Stabilité pour la somme) *les relations $o, \mathcal{O}$ sont stables pour la somme : Quels que soient les suites f, g, z on a*

$$[f = \mathcal{O}(z) \quad \textit{et} \quad g = \mathcal{O}(z)] \Longrightarrow f + g = \mathcal{O}(z)$$

$$[f = o(z) \quad \textit{et} \quad g = o(z)] \Longrightarrow f + g = o(z)$$

♣

Remarque: la relation $\sim$ n'est pas compatible avec la somme :

$$\cos x \sim 1 + x^3 \qquad \text{et} \qquad \cos x - 1 \nsim x^3 \qquad \textit{en } 0$$

Ainsi écrire $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ en 0 n'a pas grand intérêt.

Proposition 10.4.8 **Si** *$f = g + h$ avec $h = o(g)$* **Alors** *$f \sim g$* ♣

Remarque 10.4.6 *On note parfois $f + o(g)$ (resp $f + \mathcal{O}(g)$) pour désigner :*
une fonction du type $f + h$ avec $h = o(g)$ (resp $h = \mathcal{O}(g)$).
La proposition ci-dessus n'est alors que l'application directe de la définition : $f \sim g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$. ∗

Proposition 10.4.9 (Composition à droite) *Soient f, g, φ tels que*

$$\textbf{Si} \quad f \sim g \quad \textit{en } \lambda \quad \textit{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x \to \mu]{} \lambda \quad \textbf{Alors} \quad f \circ \varphi \sim g \circ \varphi \quad \textit{en } \mu$$

♣

Démonstration Soit α tel que $f = \alpha g$ et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to\lambda]{} 1$, on en déduit par composition des limites

$$f \circ \varphi = (\alpha \circ \varphi) \times (g \circ \varphi) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\mu} \alpha(\varphi(x)) = \lim_{y\to\lambda} \alpha(y) = 1$$

•

Exercice: Montrer que $\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}$ en 0

Remarque: il est faut de croire que parce que $f \sim g$ en λ alors $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$ en λ :
Exemple: $x \sim x^2$ en $+\infty$ mais $e^x \nsim e^{x^2}$ en $+\infty$

Lemme 10.4.10 (Conservation du signe) Si $f \sim g$ **Alors** *f et g sont du même signe localement.* ♣

Preuve Supposons par exemple $g > 0$ localement. alors

$$\lim \frac{f}{g} = 1 \qquad \text{d'où } \frac{f}{g} > 0 \quad \textit{localement}$$

Et donc $f > 0$ apcr •

10.5 Fonction Continue sur un intervalle

On a défini au chapitre précédent la continuité d'une fonction en un point. Nous allons étendre cette notion à la continuité sur un intervalle :

Définition 10.5.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I lorsque l'une de ces assertions équivalentes est vérifiée*
(i) Quels que soient le point $x_0 \in I$ et la suite u à valeurs dans I et convergeant vers x_0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

(ii) la restriction $f|_I$ est continue en chaque point $x_0 \in I$
(iii)

$$\forall x_0 \in I, \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in I}} f(x) = f(x_0)$$

On note alors $C^0(I)$ ou tout simplement $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I ♠

Remarque 10.5.1 *l'assertion (ii) mérite éclaircissement : Soit $x_0 \in I := \langle \alpha, \beta \rangle$*
* *Si $x_0 \in]\alpha, \beta[$*
  $f|_I$ est continue en x_0 signifie f est continue en x_0
* *Si $x_0 = \alpha$*
  $f|_I$ est continue en x_0 signifie f est continue à droite en x_0
* *Si $x_0 = \beta$*
  $f|_I$ est continue en x_0 signifie f est continue à gauche en x_0

*

Exemple: La fonction partie entière est continue sur $[0, 1[$, mais la fonction partie entière n'est pas continue en 0.

En résumé on retiendra

Proposition 10.5.1
Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si :
f est continue en chaque point de $]a, b[$ et continue à gauche en b, et à droite en a ♣

Remarque: En particulier toute restriction à un sous-intervalle J de I d'une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ est une fonction continue sur J

Grâce aux propriétés des fonctions continues, on a les propriétés suivantes :

Proposition 10.5.2 *Soient f et g définies et continues sur un intervalle I.*
la somme, le produit, sont alors continues sur I.
Il en va de même pour $|f|$, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$
Si de plus f ne s'annule pas sur I, $1/f$ est également continue sur I ♣

Proposition 10.5.3 (Enchaînement) *Soient f continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J telles que*

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Alors $g \circ f$ est continue sur I ♣

Remarque 10.5.2 *La dénomination d'enchaînement est tirée de l'anglais "chain rule" car c'est ainsi qu'on dénomme cette propriété outre-Manche. En effet elle exprime le fait qu'une chaîne est continue, lorsque les maillons le sont (condition suffisante mais non nécessaire).*

L'emboîtement $f(I) \subset J$ est donc compatible avec la continuité $*$

10.5.1 Image Continue d'un intervalle

Définition 10.5.2 (TVI) *On dira qu'une fonction f vérifie le TVI sur A, lorsque l'une des deux assertions équivalentes est vérifiée*
- *(i) l'image par f d'un intervalle $I \subset A$ est un intervalle*
- *(ii) Quels que soient l'intervalle $\langle a, b\rangle \subset A$ et le point λ pris entre $f(a)$ et $f(b)$, Il existe au moins un point ω entre a et b tel que :*

$$f(\omega) = \lambda$$

♠

Preuve Montrons l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Grâce à la caractérisation des intervalles, dire que $f(I)$ est un intervalle signifie que :

Quels que soient $\alpha, \beta \in f(I)$, pour tout λ entre α et β, on a $\lambda \in f(I)$.

Et donc en posant $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ et $\lambda = f(\omega)$, la phrase ci-dessus se réécrit :

Quels que soient $a, b \in I$, pour tout λ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\omega \in I$ tel que $\lambda = f(\omega)$. •

Remarque 10.5.3 *Naïvement, on peut interpréter ce résultat en disant que le tracé d'une fonction vérifiant le TVI sur un intervalle, se fait sans lever le crayon.* $*$

Lemme 10.5.4 *Soient $a \leq b$ deux réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. On a alors :*

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe, un point $\omega \in [a, b]$ tel que :

$$f(\omega) = 0$$

♣

Preuve

Cette démonstration à l'avantage de proposer une méthode numérique pour le calcul approché des solutions de

$$f(x) = 0$$

Il s'agit de la Méthode de dichotomie, dont voici le schéma :
Soit $a_0 = a$ et $b_0 = b$, On construit les suite (a_n) et (b_n) par récurrence

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{si } f(b_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0 \\ a_n, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0 \\ b_n, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En clair on passe d'un segment $[a_n, b_n]$ à un segment emboîté $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sur lequel f change de signe aux extrémités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

On montre que ces deux suites sont adjacentes puisque (a_n) est croissante, (b_n) décroissante et

$$|a_n - b_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

Elles convergent donc vers une même limite $\omega \in [a, b]$ et grâce à la continuité de f on a

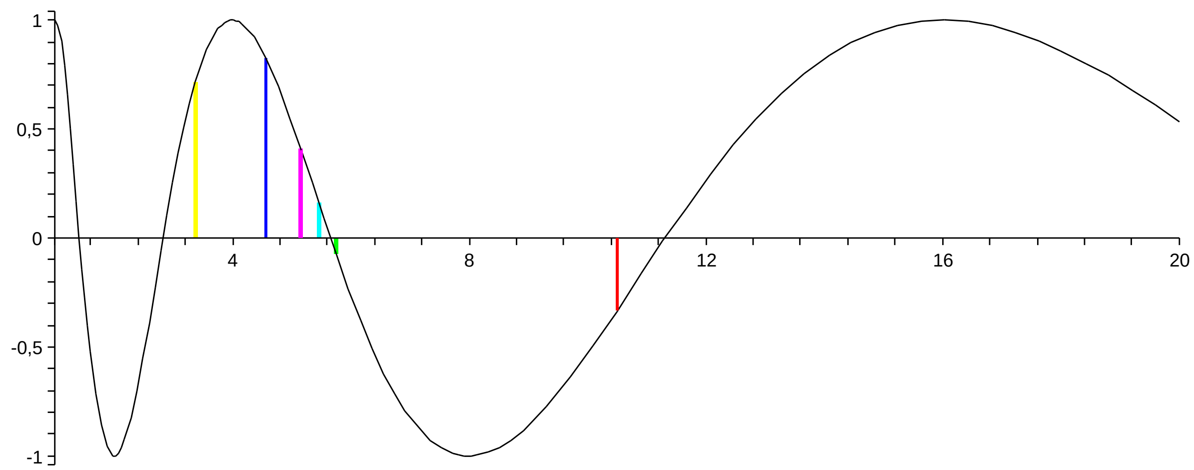
$$0 \leq f^2(\omega) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) f(b_n) \leq 0$$

D'où $f(\omega) = 0$...CQFD. •

Remarque 10.5.4 *Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construites par dichotomie nous donnent une valeur approchée du zéro ω de f*

$$\omega - a_n \leq \frac{|b-a|}{2^n} \qquad \textit{et} \qquad b_n - \omega \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

qui nous font voir que a_n et b_n sont des valeurs approchées de la solution λ par défaut et par excès, respectivement, avec une erreur d'au plus $\frac{|b-a|}{2^n}$.
Ainsi partant d'un intervalle $[a, b]$ de longueur 1, on trouve au bout de 10 itérations une valeur approchée à 3 décimales. ∗



Tant que $b - a > precision$ faire :
milieu $\leftarrow \frac{a+b}{2}$
Si $f(milieu) = 0$ **Alors** RETOURNE milieu **fin du si**
Si $f(milieu)f(a) < 0$ **Alors** $b \leftarrow milieu$ **sinon** $a \leftarrow milieu$ **fin du si**
RETOURNE milieu
fin du tant que

En appliquant ce lemme à $f - \lambda$, on trouve :

Théorème 10.5.5 (Valeurs intermédiaires)
Toute fonction f continue sur un intervalle I, vérifie le TVI sur I.

Plus précisément : *Soit f continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. On a alors :*
Quel que soit le point λ pris entre $f(a)$ et $f(b)$, Il existe au moins un point ω entre a et b tel que :

$$f(\omega) = \lambda$$

Et en particulier :
L'image continue d'un intervalle est un intervalle ♣

Remarque 10.5.5 *La réciproque est fausse, puisque l'on peut construire des fonctions non continues et qui vérifient le TVI.*
Exemple: $f(x) = \sin(1/x)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(x) = 0$ *sinon*
En revanche on a la réciproque partielle

Exercice: *Soit f monotone et vérifiant le TVI sur un intervalle I montrer que f est continue sur I* $*$

Solution : :
On supposera ici f croissante (le cas décroissant se traitant de façon analogue ou en appliquant ce qui suit à $-f$).
Il suffit de montrer que pour tout point $x_0 \in I$ f est continue à droite et/ou à gauche en x_0.
Montrons que f est continue gauche en x_0 (x_0 n'est donc pas la borne inférieure de $I =< \alpha, \beta >$).
En effet puisque f est monotone sur un intervalle $]\alpha, x_0[\subset I$, et qu'elle y est majorée par $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in]\alpha, x_0[} f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier, si on pose $\lambda := \sup_{x \in]\alpha, x_0[} f(x)$, on a

$$(*) \qquad \forall x \in]\alpha, x_0[, \quad f(x) \leq \lambda \leq f(x_0)$$

Donc le TVI appliqué à f sur $[b, x_0]$ avec un $b \in]\alpha, x_0[$ fixé nous dit

$$\exists c \in [b, x_0], \quad \lambda = f(c)$$

Et donc l'inégalité $(*)$ nous montre qu'il est absurde penser que $f(x_0) < \lambda$ car alors par définition de la borne sup λ

$$\exists y \in]\alpha, x_0[, \quad f(x_0) < f(y)$$

ce qui contredit la croissance de f Donc

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda = f(x_0)$$

La démonstration pour la limite à droite est analogue (il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $g(x) = -f(-x)$)

10.5.2 Image Continue d'un segment

Théorème 10.5.6 *(Admis) Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes* ♣

Corollaire 10.5.7 *L'image continue d'un segment est un segment* ♣

Démonstration Soit f continue sur le segmet $[a, b]$. On sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires que son image $f([a, b])$ est un intervalle $I =< \alpha, \beta >$. Or d'après le théorème précédent on a

$$\alpha = \inf f([a, b]) = \inf_{[a,b]} f \in f([a, b]) = I \cap \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \beta = \sup f([a, b]) = \sup_{[a,b]} f \in f([a, b]) = I \cap \mathbb{R}$$

D'où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $I = [\alpha, \beta]$ •

10.6 Continuité et fonctions réciproques

10.6.1 Rappels

Rappelons qu'une application f est bijective, lorsqu'elle est à la fois injective et surjective : On dira qu'une fonction f induit une injection (resp. surjection, resp. bijection) entre A et B, lorsque l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est une injection (resp. surjection, resp. bijection)

Proposition 10.6.1 *Soit f définie sur un ensemble A à valeurs dans B.*

f induit une surjection entre A et B si et seulement si $B = f(A)$

Si *f est strictement monotone sur A,* **Alors** *f induit une injection entre A et B* ♣

Exercice: le prouver

Remarquons que la réciproque de la deuxième assertion est fausse, car l'on peut trouver des fonctions injectives non monotones.
En revanche, on a la réciproque partielle

Lemme 10.6.2 *Soit f une fonction* **continue** *sur un* **intervalle** *I. On a* **Alors**

$$f \textit{ est injective sur } I \Longleftrightarrow f \textit{ est strictement monotone sur } I$$

♣

Preuve La réciproque est assurée par la proposition ci-dessus.

Pour montrer l'implication directe, raisonnons par contraposée, supposons donc f non strictement monotone sur I, et montrons que f n'est pas injective.
Du fait que f n'est pas strictement monotone, on peut trouver trois points $a < b < c$ tels que

$$f(a) \leq f(c) \leq f(b) \qquad \text{ou} \qquad f(b) \leq f(a) \leq f(c)$$

(faire un dessin).
Plaçons nous dans le premier cas :
Le TVI appliqué à f sur $[a, b]$ avec $\lambda = f(c) \in [a, b]$ nous assure :

$$\exists \omega \in [a, b], \qquad f(\omega) = \lambda$$

On a donc $a \leq \omega \leq b < c$ (en particulier $\omega \neq c$)et $f(\omega) = f(c)$ d'où f n'est pas injective.
Le deuxième se traite de la même façon.... CQFD •

L'objet du prochain paragraphe, est de montrer que l'on a une réciproque continue.

10.6.2 Théorème de la bijection

Théorème 10.6.3 (de la bijection) *Toute fonction* **continue, strictement monotone** *sur un* **intervalle** *I, induit une bijection entre les intervalles I et $f(I)$.*
La réciproque $g : f(I) \longrightarrow I$ est continue et de même monotonie que f. ♣

Démonstration Du fait de la continuité de f, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que $f(I)$ est bien un intervalle.

L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est bien évidemment surjective puisque

$$\varphi(I) = f(I)$$

Et bien évidemment elle est injective, puisque, comme f, elle est strictement monotone.... c'est donc une bijection.

Soit g sa réciproque elle est bien évidemment de même monotonie (stricte) que f (le prouver).

Il ne reste plus qu'à montrer que g est continue sur $f(I)$.

Soit $y_0 \in f(I)$, on écrit donc $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in I$.
Soit par ailleurs une suite v de $f(I)$ monotone convergeant vers y_0, il nous faut montrer que :

$$(?) \qquad \lim_{n \to +\infty} g(v_n) = g(y_0)$$

par construction, la suite v, définit une suite u à valeurs dans I et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = f(u_n)$$

On a donc

$$(?) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = x_0$$

Supposons pour fixer les choses f et v croissantes (les autres cas se traiteront de façon analogue). On en déduit puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq y_0$ et que g est croissante

$$u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$$

Et donc la suite u croissante majorée, converge vers une limite ℓ

$$\lim u = \ell \leq x_0$$

Par ailleurs puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \ell$ et que f est croissante

$$v_n \leq f(l)$$

Et donc par passage à la limite

$$f(x_0) \leq f(\ell)$$

D'où puisque g est croissante, $x_0 \leq l$.
Conclusion $x_0 \leq \ell \leq x_0$ et donc $x_0 = \ell$ i.e. (?) est vrai.... CQFD •

Remarque 10.6.1 *Etant donné que pour les fonctions monotones sur un intervelle , continuité et TVI sont équivalentes, le théorème ci-dessus est équivalent à l'énoncé suivant :*

Si *f strictement monotone et vérifiant le TVI sur un intervalle I,* **Alors** *:*
- *f induit une bijection entre les intervalles I et $f(I)$*
- *sa réciproque f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f et vérifie le TVI sur $f(I)$*

∗

Exercice: le démontrer
Solution : :
Supposons par exemple f strictement croissante, par une simple contraposée, on voit que (exercice)

$$(*) \qquad \forall x, y \in I, \qquad x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

La strict monotonie qui assurait l'injectivité nous montre donc que f induit une bijection entre I et $f(I)$, l'inégalité ci-dessus nous montre bien que f^{-1} est strictement croissante, enfin puisque f vérifie le TVI, $f(I)$ est bien un intervalle.
Montrons que f^{-1} vérifie le TVI sur $f(I)$
Soient $A, B \in f(I)$ avec $A \leq B$, on pose $A = f(a)$ et $B = f(b)$ avec $a, b \in I$.
Soit $\lambda \in]f^{-1}(A), f^{-1}(B)[=]a, b[\subset I$ et posons $\omega = f(\lambda)$
Grâce à la croissance de f, on voit que $\omega \in [A, B]$ et par définition de ω, $f^{-1}(\omega) = \lambda$ ...CQFD

Dans la pratique on retiendra

Proposition 10.6.4 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*
Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $\langle \alpha, \beta \rangle$:
f réalise une bijection entre $\langle \alpha, \beta \rangle$ et l'intervalle de même type $\langle f(\alpha^+), f(\beta^-) \rangle$.
Où l'on a posé.

$$f(\alpha^+) := \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \qquad et \qquad f(\beta^-) := \lim_{x \to \beta^-} f(x)$$

De plus la réciproque f^{-1} est continue et de même monotonie.
On a bien évidemment l'énoncé analogue dans le cas où, f est strictement décroissante. ♣

Preuve Au vu du théorème de la bijection, il suffit de montrer que :

$$f(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle f(\alpha^+), f(\beta^-) \rangle$$

S'agissant d'une identité entre intervalles, il suffit de montrer que

$$f(\alpha^+) = \inf_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(\beta^-) = \sup_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x)$$

Or ceci découle immédiatement du corollaire sur les limites de fonctions monotones.

Ne reste plus qu'à déterminer pourquoi ces intervalles sont de même type :
* Si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est fermé aux deux extrémités, il s'agit d'un segment, et donc son image par f continue est aussi un segment (voir Théorème **??**).
* Si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est ouvert aux deux extrémités, l'image l'est aussi (exercice)

* Si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est fermé seulement à l'une des extrémités, par exemple $\langle \alpha, \beta \rangle = [\alpha, \beta[$:
On découpe alors l'intervalle en deux :

$$[\alpha, \beta[= [\alpha, \lambda] \cup]\lambda, \beta[$$

d'où grâce aux deux résultats précédents :

$$f([\alpha, \beta[) = f([\alpha, \lambda]) \cup f(]\lambda, \beta[) = [f(\alpha^+), f(\lambda^-)] \cup]f(\lambda^+), f(\beta^-)[$$

Et donc puisque f est continue en λ, on a $f(\lambda^-) = f(\lambda^+)$, d'où

$$f([\alpha, \beta[) = [f(\alpha^+), f(\beta^-)[$$

•

Exemple: la fonction $x \mapsto x^2$ est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$, on note $x \mapsto \sqrt{x}$ sa fonction réciproque, il s'agit de la fonction racine carrée, elle est continue et strictement croissante.

Plus particulièrement la preuve ci-dessus, nous donne

Lemme 10.6.5 *Soit f une fonction* **continue** *sur un intervalle* **fermé** $[a, b]$.

Si f *est monotone sur* $]a, b[$ **Alors** f *est monotone sur* $[a, b]$

Si f *strictement monotone sur* $]a, b[$ **Alors** f *est strictement monotone sur* $[a, b]$ ♣

Démonstration Le premier résultat est un simple passage à la limite :
Dans le cas croissant par exemple

$$\forall x, y \in]a, b[, \qquad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

En faisant $y \to b^-$ (à x fixé) puis $x \to a^+$ (à y fixé) on obtient

$$a < X \leq Y < b \Longrightarrow f(a) \leq f(X) \leq f(Y) \leq f(b)$$

CQFD

Considérons donc f strictement monotone sur $]a, b[$. Et quitte à changer f en $-f$, on peut même supposer que f est strictement croissante sur $]a, b[$.
D'après le théorème de la bijection

$$(*) \qquad f(]a, b[) =]f(a^+), f(b^-)[=]f(a), f(b)[$$

La dernière égalité étant due à la continuité de f. On en déduit grâce à (*) et à la stricte croissance de f sur $]a, b[$ que :
Dès que $a < x < y < b$ on a $f(a) < f(x) < f(y) < f(b)$......CQFD •

10.7 Brève Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 10.7.1 *On définit par extension les fonctions à valeurs complexes $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.*
A chaque $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ on peut associer 4 nouvelles fonctions

$$\overline{f} \qquad Re(f) \qquad Im(f) \qquad et \qquad |f|$$

les trois dernières étant dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et la première dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. ♠

Remarque 10.7.1 *Les notions de fonctions croissante, décroissante, majorée ou minorée n'ont aucun sens s'agissant de fonctions à valeurs complexes.* *

En revanche la notion de suite bornée peut-être étendue aux suites complexes ainsi :

Définition 10.7.2 *On dit qu'une suite f est bornée lorsque :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+; \quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$$

i.e. lorsque $|f|$ est majorée. ♠

Définition 10.7.3 *Soit f une fonction à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$ définie au voisinage d'un point $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f converge vers ℓ en λ et on note*

$$f(x) \xrightarrow[x \to \lambda]{} \ell$$

lorsque $\lim |f - \ell| = 0$, *c'est à dire lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists W \in \mathcal{BV}(\lambda); \quad \forall x \in I, \quad x \in W \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On définit de même les limites à gauche, à droite et respectivement par valeurs différentes. ♠

Remarque: vu la quantification, on retrouve facilement certaines propriétées comme l'unicité de la limite d'où la notation

$$\lim_{\lambda} f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to \lambda} f(x) = \ell$$

Lemme 10.7.1 *Toute fonction à valeurs complexes et convergente est localement bornée.* ♣

Proposition 10.7.2 *Les résultats sur les limites d'une combinaison linéaire (resp. un produit, resp. un quotient) de suites réelles convergentes s'étendent aux suites complexes convergentes.* ♣

Proposition 10.7.3 **Si** *f et g sont deux fonctions complexes telles que*

$$|f| \leq |g| \quad apcr \qquad et \qquad \lim g = 0$$

Alors $\lim f = 0$ ♣

Proposition 10.7.4 *Soient f une fonction complexe définie au voisinage d'un point $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, alors*

$$\lim_{\lambda} f = \ell \Longleftrightarrow (\lim_{\lambda} Re(f) = Re(\ell) \quad et \quad \lim_{\lambda} Im(f) = Im(\ell))$$

♣

Démonstration Posons $\ell = a + ib$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha = Re(f)$ et $\beta = Im(f)$. Alors

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - \ell| = \sqrt{|\alpha(x) - a|^2 + |\beta(x) - b|^2}$$

- Montrons $\Longrightarrow$.

$$\forall x \in I, \qquad |\alpha(x) - a| \leq |u_n - \ell| \qquad \text{et} \qquad |\beta(x) - b| \leq |f(x) - \ell|$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes

- Montrons $\Longleftarrow$.

$$\forall x \in I, \qquad |u_n - \ell| \leq (|\alpha(x) - a| + |\beta(x) - b|)$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes •

Corollaire 10.7.5 **Si** $\lim f = \ell$ **Alors** $\lim \overline{f} = \overline{\ell}$ ♣

Preuve Il suffit de regarder les limites de la partie réelle et imaginaire de u •

Remarque 10.7.2 *Une deuxième preuve des deux propositions précédentes consiste à prouver tout d'abord que* $\lim f = \lim \overline{f}$ *en passant à la limite dans l'"égalité*

$$|f - \ell| = |\overline{f} - \overline{\ell}|$$

Puis par colinéarité de la limite lorsque $\lim u = \ell$

$$\lim Re(f) = \lim \frac{f + \overline{f}}{2} = \frac{\ell + \overline{\ell}}{2} = Re(\ell) \quad et \quad \lim Im(f) = \lim \frac{f - \overline{f}}{2} = \frac{\ell - \overline{\ell}}{2} = Im(\ell)$$

Et réciproquement si les limites des parties réelles et imaginaires sont telles que ci-dessus on a, par colinéarité de la limite :

$$\lim f = \lim Re(f) + iIm(f) = \lim Re(f) + i \lim Im(f)$$

*

Définition 10.7.4 *Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en un point $x_0 \in I$ lorsque* $\lim_{x_0} f = f(x_0)$
(ou encore lorsque l'une des deux autres propositions équivalentes vues pour les fonctions réelles)
i.e. lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

Cette même fonction est dite continue sur l'intervalle I lorsque $f|_I$ est continue en tout point de I
(ou encore lorsque l'une des deux autres propositions équivalentes vues pour les fonctions réelles)
i.e. lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.
leur ensemble se note $\mathcal{C}(I)$ (ou encore $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ pour éviter toute confusion) ♠

Exemple: la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque: On peut avoir $|f|$ continue et f discontinue. (voir $x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}$)