Table des matières

17 Développements Limités **3**

17.1 Existence et Définition 3

17.2 Propriétés Fondamentales 5

17.3 Les Classiques 7

17.3.1 Par Taylor Young 7

17.3.2 Par Composition 9

17.3.3 Par Primitivation 9

17.3.4 Passage à l'inverse 9

17.3.5 Coefficients indéterminés : Le Cas de La Tangente 10

17.4 Développements Asymptotiques 11

17.5 Application des DL à l'étude des courbes et graphes 12

17.5.1 Cas des graphes 12

17.5.2 Cas des courbes 14

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Chapitre 17

Développements Limités

17.1 Existence et Définition

Nous avons vu que toute fonction de classe C^n au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynôme. La réciproque étant fausse, le but de ce chapitre est d'étudier ces fonctions qui ne sont pas forcément de classe C^n et qui sont approchables par des fonctions polynômes

On rappelle que la notation $f(x) = g(x) + o(h(x))$ lorsque $x \to \lambda$ signifie que l'on peut trouver ε définie au voisinage de λ tel que pour tout x dans ce voisinage

$$f(x) = g(x) + h(x)\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Définition 17.1.1 *Une fonction f définie au voisinage V (éventuellement épointé) de x_0, admet un développement limité d'ordre n en x_0, lorsque :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big) \quad lorsque\, x \to x_0$$

Où $\Big(P_n[f]\Big)(X) := a_0 + a_1(X - x_0) + a_2(X - x_0)^2 + \ldots + a_n(X - x_0)^n$ est un polynôme de degré **au plus** *n, qu'on appelle partie principale du développement.*

Lorsque f admet un tel développement, on note $f \in DL_n(x_0)$
On peut également définir de façon analogue $f \in DL_n(x_0^+)$ et $f \in DL_n(x_0^-)$ ♠

Remarque 17.1.1 *Quitte à étudier $f(x + x_0)$ en lieu et place de f, on voit que l'on peut toujours se ramener à l'étude des développements limités en 0.*

$$f \in DL_n(x_0) \Longleftrightarrow f(x + x_0) \in DL_n(0)$$

Cependant le développement limité d'une fonction dépend bien évidemment du point où on le calcule. ∗

Remarque 17.1.2 *Une fonction admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si elle admet le même DL_n à gauche et à droite en ce point* ∗

Exercice: le prouver

Proposition 17.1.1 *Pour tout $f \in DL_n(x_0)$, la partie principale $P_n[f]$ est unique* ♣

Démonstration
Supposons que $f \in DL_n(x_0)$ admette deux développements limités d'ordre n différents.
Soient P et Q les parties principales respectives, on a alors par soustraction :

$$(*) \qquad 0 = R(x) + (x - x_0)^n \zeta(x)$$

avec $R = P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lim_{x_0} \zeta = 0$.

$$\text{Notons} \qquad R(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + ... + \alpha_n(x - x_0)^n$$

Par un simple passage à la limite $x \to x_0$ dans $(*)$, on trouve $\alpha_0 = 0$. En divisant l'identité $(*)$ par $x - x_0$ et refaisant un passage à la limite on trouve $\alpha_1 = 0$... en réitérant le processus autant de fois que nécessaire on aboutit à :

$$R = 0$$

... CQFD •

Remarque: Par la suite on notera $P_n[f]$ la partie principale du développement de f à l'ordre n en x_0 (notation non standard). Le point x_0 n'apparaissant pas dans la notation, celui-ci sera précisé par le contexte.

Remarque: Dans MAPLE faire

$$series(f(x), x = x_0, n)$$

Attention le développement est d'ordre $n-1$ car le reste est de la forme $O(x^n)$

Proposition 17.1.2 (Troncature) *On a pour tout $k \leq n$*

$$DL_n(x_0) \subset DL_k(x_0)$$

Et pour tout $f \in DL_n(x_0)$

$$P_n[f] = \langle P_f^{[n]} \rangle_{d^0 \leq k}$$

Où pour un polynôme Q, $\langle Q \rangle_{d^0 \leq n}$ désigne le polynôme construit à partir de Q en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

i.e. lorsque $Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1(X - x_0) + \alpha_2(X - x_0)^2 + \ldots + \alpha_m(X - x_0)^m$ avec $m \geq n$

$$\langle Q \rangle_{d^0 \leq n}(X) = \alpha_0 + \alpha_1(X - x_0) + \alpha_2(X - x_0)^2 + \ldots + \alpha_n(X - x_0)^n$$

♣

Preuve Soit $f \in DL_n(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x) \quad (\text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

Posons $\varepsilon(x) = a_{k+1}(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-k} + (x - x_0)^{n-k}\epsilon(x)$ On a alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k \varepsilon(x) \quad (\text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

•

Exemple: Grâce à la somme d'une suite géométrique de raison $x \in]-1, 1[$

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$

Par le changement de variable $x \mapsto -x$, on en déduit

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n - (-1)^n x^n \frac{x}{1+x}$$

D'où les $DL_n(0)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) \quad \text{lorsque } x \to 0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad \text{lorsque } x \to 0$$

Lemme 17.1.3 *Soit f définie sur un voisinage (éventuellement épointé) de x_0.*
$f \in DL_0(x_0)$ si et seulement si f est prolongeable par continuité en x_0

Par ailleurs si f est définie en x_0 :
$f \in DL_1(x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0
Et dans ce cas on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

S'agissant de la continuité ou de la dérivabilité à droite (resp. à gauche), on a des résultats analogues en remplaçant $DL_n(x_0)$ par $DL_n(x_0^{\pm})$ ♣

Exercice: Le Prouver

Remarque 17.1.3 *La régularité liée aux DL s'arrête là. En effet la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & si \ \ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

admet un $DL_2(0)$ et pourtant f n'est pas deux fois dérivable!!!! (pourquoi ?) ∗

17.2 Propriétés Fondamentales

Proposition 17.2.1 (Equivalents et $DL(x_0)$)
Soit $f \in DL_n(x_0)$, dont le développement limité s'écrit

$$f(x) = a_k(x-x_0)^k + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x)$$

$$\textbf{Si} \quad a_k \neq 0 \quad \textbf{Alors} \quad f \sim a_k(x-x_0)^k \quad au\ voisinage\ de\ x_0$$

Les résultats analogues étant vrais pour $f \in DL_n(x_0^+)$ et $f \in DL_n(x_0^-)$. ♣

Proposition 17.2.2 (Opérations Algébriques)
Soient $f, g \in DL_n(x_0)$ alors

$$\lambda f + \mu g \in DL_n(x_0) \quad et \quad f \cdot g \in DL_n(x_0)$$

On a même :

$$P_n[\lambda f + \mu g] = \lambda P_n[f] + \mu P_n[g] \quad et \quad P_n[f \cdot g] = \langle P_n[f] \cdot P_n[g] \rangle_{d^0 \leq n}$$

♣

Démonstration Le résultat sur la somme est évident, montrons celui portant sur le produit :

$$f(x) = P_n[f](x) + (x-x_0)^n\epsilon_1(x) \quad (\text{avec} \ \ \epsilon_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

$$g(x) = P_n[g](x) + (x-x_0)^n\epsilon_2(x) \quad (\text{avec} \ \ \epsilon_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

D'où le produit $f(x)g(x)$ s'écrit

$$[P_n[f](x) + (x-x_0)^n\epsilon_1(x)] \times [P_n[g](x) + (x-x_0)^n\epsilon_2(x)]$$

Soit

$$P_n[f](x)P_n[g](x) + (x-x_0)^n[\epsilon_2(x)P_n[f](x) + \epsilon_1(x)P_n[g](x) + (x-x_0)^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)]$$

On note $\eta(x)$ l'expression entre crochets.
Par ailleurs, puisque $P_n[f]P_n[g]$ est son propre $DL_{2n}(x_0)$, on a grâce au lemme de troncature :

$$P_n[f](x)P_n[g](x) = \langle P_n[f] \cdot P_n[g] \rangle_{d^0 \leq n} + (x-x_0)^n\epsilon_3(x) \quad (\text{avec} \ \ \epsilon_3(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

D'où

$$f(x)g(x) = \langle P_n[f] \cdot P_n[g] \rangle_{d^0 \leq n} + (x-x_0)^n\epsilon_4(x)$$

avec $\epsilon_4(x) := \epsilon_3(x) + \eta(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ •

Exemple: On a les $DL_n(0)$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + \ldots + x^{2n}}_{P(x)} + o(x^{2n}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n}}_{P(-x)} + o(x^{2n})$$

D'où

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(P(x) + P(-x)\right) = 1 + x^2 + \ldots + x^{2^n} + o(x^{2n})$$

Remarque: On montre ainsi que la partie principale du $DL_n(0)$ de la partie paire d'une fonction f s'obtient en prenant la partie paire de la partie principale du $DL_n(0)$ de f (l'analogue étant vrai pour la partie impaire)

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Corollaire 17.2.3 (Composition)
Pour g polynômiale et $f \in DL_n$ ***avec*** *$f(0) = 0$, on a*

$$g \circ f \in DL_n(0) \quad et \quad P_n[g \circ f] = \langle P_n[g] \circ P_n[f] \rangle_{d^0 \leq n}$$

ici bien sur $P_n[g] = \langle g \rangle_{d^0 \leq n}$ ♣

Exemple: $P_n[x \mapsto f(-x)](X) = P_n[f](-X)$

Remarque: Ce corollaire est encore valable lorsque g est dans $DL_n(0)$

Lemme 17.2.4 (Symétrie)
Soit $f \in DL_n(0)$.
Si *f est paire (resp. impaire)* **Alors**
la partie principale $P_f^{[n]}$ ne contient que des monômes de degré pair (resp. impair) ♣

Preuve Par composition on voit que $f(-x) \in DL_n(0)$ et que $P_n[f(-x)](X) = P_n[f](-X)$.
suivant que f est paire ou impaire on a $f(-x) = \pm f(x)$ d'où par linéarité du développement limité :

$$P_n[f](-X) = P_n[f(-x)](X) = P_n[\pm f(x)](X) = \pm P_n[f](X)$$

D'où $P_n[f]$ a la même parité que f. •

Remarque 17.2.1
Si *$f \in DL_{2n+1}(0)$ et f paire* **Alors** $P_{2n+1}[f] = P_{2n}[f]$
Si *$f \in DL_{2n}(0)$ et f impaire* **Alors** $P_{2n}[f] = P_{2n-1}[f]$ ∗

Exercice: le prouver

Proposition 17.2.5 (Primitivation)
Soit $f \in DL_n(x_0)$ admettant une primitive F au voisinage de x_0 (i.e $F' = f$ sur ce voisinage) **Alors**

$F \in DL_{n+1}(x_0)$ et $P_{n+1}[F]$ est égale à la primitive de $P_n[f]$ valant $F(x_0)$ en x_0.

Plus précisément : **Si** $P_n[f](x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n$

$$\textbf{Alors} \quad P_{n+1}[F](x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

♣

Démonstration Soit Q la primitive de $P_n[f]$ valant $F(x_0)$ en x_0. Et posons (dans un voisinage épointé de x_0)

$$\theta(x) = F(x) - Q(x)$$

θ vérifiant les hypothèses du TAF sur le segment d'extrémités x_0 et x, on a :

$$(*) \qquad \theta(x) - \theta(x_0) = (x - x_0)\theta'(\lambda_x)$$

avec λ_x un réel compris entre x_0 et x, plus particulièrement

$$(\bullet) \qquad |\lambda_x - x_0| \leq |x - x_0|$$

En particulier par le théorème des gendarmes (λ_x vue comme une fonction de x)

$$(\bullet\bullet) \qquad \lambda_x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$$

Ainsi $(*)$ se réécrit pour tout dans x dans le voisinage considéré :

$$(**) \qquad \theta(x) = (x - x_0)[f(\lambda_x) - P_n[f](\lambda_x)] = (x - x_0)(\lambda_x - x_0)^n\epsilon(\lambda_x) \quad (\text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0)$$

Posons au voisinage épointé de x_0, $(x - x_0)^{n+1}\eta(x) := \theta(x)$. $(**)$ nous donne

$$\eta(x) = \left(\frac{\lambda_x - x_0}{x - x_0}\right)^n \epsilon(\lambda_x)$$

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Or par composition des limites (voir (••))

$$\epsilon(\lambda_x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

D'où, comme $|\eta(x)| \leq |\epsilon(\lambda_x)|$, le théorème des gendarmes nous donne :

$$\eta(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

Conclusion

$$F(x) = Q(x) + (x-x_0)^{n+1}\eta(x) \quad (\text{avec } \eta(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0)$$

•

Corollaire 17.2.6 (Dérivation) *Soit f une fonction dérivable au voisinage de x_0.*
Si $f \in DL_n(x_0)$ **ET** $f' \in DL_{n-1}(x_0)$ **Alors**

$$P_{n-1}[f'] = \Big(P_n[f]\Big)'$$

♣

Exercice: le prouver

Remarque 17.2.2 *Ce dernier résultat ne permet pas d'affirmer si une dérivée admet un DL, en effet cela fait partie des hypothèses.* ∗

17.3 Les Classiques

17.3.1 Par Taylor Young

Proposition 17.3.1 (Taylor-Young)
Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, alors

$$C^n(I) \subset DL_n(x_0)$$

En particulier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad lorsque \ \ x \to x_0$$

♣

Démonstration Supposons $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ simple, déjà vu).
D'après Taylor-Lagrange avec reste intégral, on a le développement de Taylor à l'ordre $n-1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0))dt$$

Posons

$$\eta : x \mapsto \begin{cases} n!\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} & \textbf{Si} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \textbf{Si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

On a pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\eta(x)$.
Puisque $\eta(x_0)$, il suffit de montrer que

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \eta(x) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ Par continuité de de $f^{(n)}$ en x_0, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u \in I, \quad |u - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f^{(n)}(u) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

On en déduit pour tout $x \in I$ tel que $0 < |x - x_0| \leq \alpha$

$$t \in [0,1] \Longrightarrow |f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0 + t(x - x_0)| \leq \varepsilon$$

$$\eta(x) = n\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x_0+t(x-x_0))dt - f^{(n)}(x_0) = n\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x_0+t(x-x_0))dt - n\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(x_0)dt$$

D'où

$$|\eta(x)| = \left| n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\Big(f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)\Big)dt \right| \leq n\int_0^1 (1-t)^{n-1} \underbrace{\Big|f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)\Big|}_{\leq \varepsilon} dt$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |\eta(x)| \leq \varepsilon$$

CQFD •

Remarque: avec les notations ci-dessus on a $P_n[f] = T_n[f]$.
Remarque: L'inclusion $C^n(I) \subset DL_n(x_0)$ est stricte, et la méthode de calcul par dérivées successives proposée par cette formule n'est pas la plus commode

Nous en déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp, \sin, \cos \in DL_n(0)$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Car grâce au théorème de Taylor-Young, et par des récurrences immédiates on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$

$$(\exp)^{(k)}(x) = \exp(x) \qquad (\sin)^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad (\cos)^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$$

Question: Que peut-on dire du $DL_{2n+1}(0)$ de cos et du $DL_{2n+2}(0)$ de sin ?

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. De même on montre par récurrence pour tout $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{d^k(1+x)^\alpha}{dk} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)(1+x)^{\alpha - k}$$

D'où en posant

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

On trouve le $DL_n(0)$

$$(D_\alpha) \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) x^k + + o(x^n)$$

Exemple: On a le $DL_n(0)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

Remarque: il s'agit la d'une généralisation de la formule du binôme de Newton puisque

$$\textbf{Si} \ \ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq n, \quad \textbf{Alors} \qquad C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

17.3.2 Par Composition

par composition avec $x \mapsto x^2$ dans (D_{-1}), on trouve

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

De même par l par composition avec $x \mapsto x^2$ dans $(D_{-1/2})$, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + o(x^{2n})$$

Exercice: Donner les $DL_n(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et de $\frac{1}{1-x^2}$

17.3.3 Par Primitivation

D'où par primitivation de (D_{-1})

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

Et par primitivation, des deux DL précédents :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

Question: Qu'en est-il pour arccos ?

Exercice: Donner les $DL_n(0)$ des fonctions argsh et argth

17.3.4 Passage à l'inverse

Soit $f \in DL_n(x_0)$ tel que $f \neq 0$ au voisinage de x_0, voici une méthode qui nous permettra de trouver le $DL_n(x_0)$ de $1/f$.
Tout d'abord quitte à considérer $x \mapsto f(x + x_0)$, on peut supposer $x_0 = 0$.
Puisque $f(0) \neq 0$, posons alors

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(0)} - 1$$

On a

$$g \in DL_n(0) \qquad g(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_n[g] = \frac{1}{f(0)} P_n[f] - 1$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \cdot \frac{1}{1+g(x)}$$

D'où par composition et par linéarité

$$P_n[1/f] = \frac{1}{f(0)} \langle R \circ P_n[g] \rangle_{d^0 \leq n}$$

$$\text{avec } \; R(X) = 1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n X^n$$

Preuve On traite le cas $n \geq 1$ Puisque pour tout $y \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{1+y} = R(y) - (-y)^n \frac{y}{1+y}$$

Par continuité de g en 0, on a pour pour un certain voisinage I de 0,

$$\forall x \in I, \quad g(x) \in]-1, 1[$$

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Et donc pour tout $x \in I$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \cdot \frac{1}{1+g(x)} = \frac{1}{f(0)} \cdot \Big(R(g(x)) + \underbrace{(-g(x))^n \frac{g(x)}{1+g(x)}}_{=o(g(x)^n)} \Big)$$

Or R est polynômiale donc

$$R(g(x)) = \langle R \circ P_n[g] \rangle_{d^0 \leq n} + o(x^n)$$

Par ailleurs puisque g est continue en 0 on a par troncature le $DL_1(0)$, $g = g'(0)x + o(x)$ et donc $g = O(x)$ D'où $g(x)^n = O(x^n)$, et donc par transitivité mixte

$$(-g(x))^n \frac{g(x)}{1+g(x)} = o(x^n)$$

On conclut par stabilité additive de o •

Exemple: Cherchons un $DL_5(0)$ de $1/cos$. D'où $g : x \mapsto \cos x - 1$ vérifie $g(0) = 0$ et admet un $DL_n(0)$

$$g(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+g(x)}$$

D'où

$$\frac{1}{\cos x} = \Big\langle 1 - \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Big) + \underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Big)^2}_{\frac{x^4}{4}} - \underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Big)^3}_{0} + \underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Big)^4}_{0} - \underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Big)^5}_{0} \Big\rangle_{d^0 \leq 5} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

Exercice: Donner le $DL_5(0)$ de $1/\sin(x)$

17.3.5 Coefficients indéterminés : Le Cas de La Tangente

Plutôt que d'écrire les $DL_n(0)$ du cosinus et du sinus pour trouver le $DL_n(0)$, ou pire encore plutôt que d'utiliser la formule de Taylor-Young, nous allons exhiber ici une méthode de calcul très élégante qui se généralise à tout ordre.

Comme la fonction $\tan \in C^\infty(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$, le Théorème de Taylor-Young, nous dit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \tan \in DL_n(0)$$

Posons alors, par exemple à l'ordre 5 :

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

Or tan étant impaire on a $a_0 = a_2 = a_4 = 0$, soit

$$(*) \qquad \tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

Par ailleurs par le théorème de composition et troncature on sait que $1 + \tan^2(x) \in DL_4(0)$ et

$$1 + \tan^2(x) = \langle 1 + (a_1 x + a_3 x^3)^2 \rangle_{d^0 \leq 4} + o(x^4)$$

Soit

$$(**) \qquad 1 + \tan^2(x) = 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + o(x^4)$$

D'où par primitivation

$$(***) \qquad \tan(x) = x + a_1^2 \frac{x^3}{3} + 2a_1 a_3 \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Par unicité du DL, il suffit alors d'identifier les coefficients des parties principales de $(*)$ et de $(***)$

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{a_1^2}{3} \\ a_5 &= \frac{2a_1^2 a_3}{5} \end{cases}$$

D'où par résolution du système, on trouve

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Question: Quel est le $DL_6(0)$ de tan ?

Exercice: Calculer le $DL_7(0)$ de tan

17.4 Développements Asymptotiques

Lorsque l'on veut connaître le comportement d'une fonction au voisinage de l'infini, un moyen d'y parvenir est donné par ce qu'on appelle le développement asymptotique

Définition 17.4.1 *Une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet un développement asymptotique d'ordre n en $+\infty$, lorsque :*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}) \quad (\textit{lorsque } \ x \to +\infty$$

On appelle partie principale et reste d'ordre n les premiers et le dernier terme de cette somme. Et on note $f \in DL_n(+\infty)$

On définit de même le développement asymptotique en $-\infty$. Et on note $f \in DL_n(-\infty)$ ♠

Remarque 17.4.1 *On a l'équivalence suivante :*

$$f \in DL_n(+\infty) \Longleftrightarrow f(\frac{1}{x}) \in DL_n(0^+)$$

Plus particulièrement :

$$f(\frac{1}{x}) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \quad (\textit{avec } \ \epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0)$$

. *si et seulement si*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\eta(x)}{x^n} \quad (\textit{avec } \ \eta(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0)$$

L'analogue en $-\infty$ étant vrai. $*$

Ainsi toutes les propriétés sur les développements asymptotiques de f (et dans la pratique tous les calculs) se déduisent des développements limités de $f(\frac{1}{x})$ en 0^+ (resp. 0^-).

Exemple: Puisqu'on a le $DL_n(0^+)$, $\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$, on en déduit le $DL_n(+\infty)$

$$\ln(1+x) - \ln(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{nx^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

Proposition 17.4.1 (Equivalents et $DL(\infty)$)
Soit $f \in DL_n(+\infty)$, dont le développement asymptotique s'écrit

$$f(x) = \frac{a_k}{x^k} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

$$\textbf{Si} \quad a_k \neq 0 \quad \textbf{Alors} \quad f(x) \sim \frac{a_k}{x^k} \quad \textit{au voisinage de} \ \ +\infty$$

Le résultat analogue étant vrai pour $f \in DL_n(-\infty)$. ♣

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Remarque: lorsque on mélange puissances positives et négatives de x, on parle de développement limité généralisé

Exemple: En $+\infty$ on a

$$x\arctan(\frac{x}{x-1}) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o(\frac{1}{x})$$

En effet par Taylor, puisque

$$\frac{d}{dx}(\arctan(1+x))(0) = [\frac{1}{1+(x+1)^2}]_{x=0} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\arctan(1+x))(1) = [-\frac{2x+2}{(1+(x+1)^2)^2}]_{x=0} = -\frac{1}{2}$$

On a

$$\arctan(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \quad lorsque \quad x \to 0$$

Or

$$\frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + o(x^2) \quad lorsque \quad x \to 0$$

D'où le $DL_2(0)$

$$\arctan(\frac{1/x}{1/x-1}) = \arctan(1 + \underbrace{\frac{1}{1-x} - 1}_{=0 \ en \ 0}) = \langle \frac{\pi}{4} + \frac{(x+x^2)}{2} - \frac{(x+x^2)^2}{4} \rangle_{d^0 \leq 2} + o(x^2)$$

Donc

$$\arctan(\frac{1/x}{1/x-1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

D'où le $DL_2(+\infty)$

$$\arctan(\frac{x}{x-1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o(1/x^2)$$

Remarque: Dans MAPLE faire

$$series(f(x), x = infinity, n)$$

Attention le développement est d'ordre $n-1$ car le reste est de la forme $O(x^n)$

17.5 Application des DL à l'étude des courbes et graphes

17.5.1 Cas des graphes

Comme on l'a vu au Lemme 17.1.3 , lorsque f est dérivable en un point x_0, $f \in DL_1(x_0)$. Plus généralement

Proposition 17.5.1 (Etude de la tangente)
Soit $f \in DL_n(x_0)$ avec $n \geq 2$, tel que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + c(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (lorsque \ \ x \to x_0$$

Alors *le graphe Γ de f admet pour tangente en x_0 :*

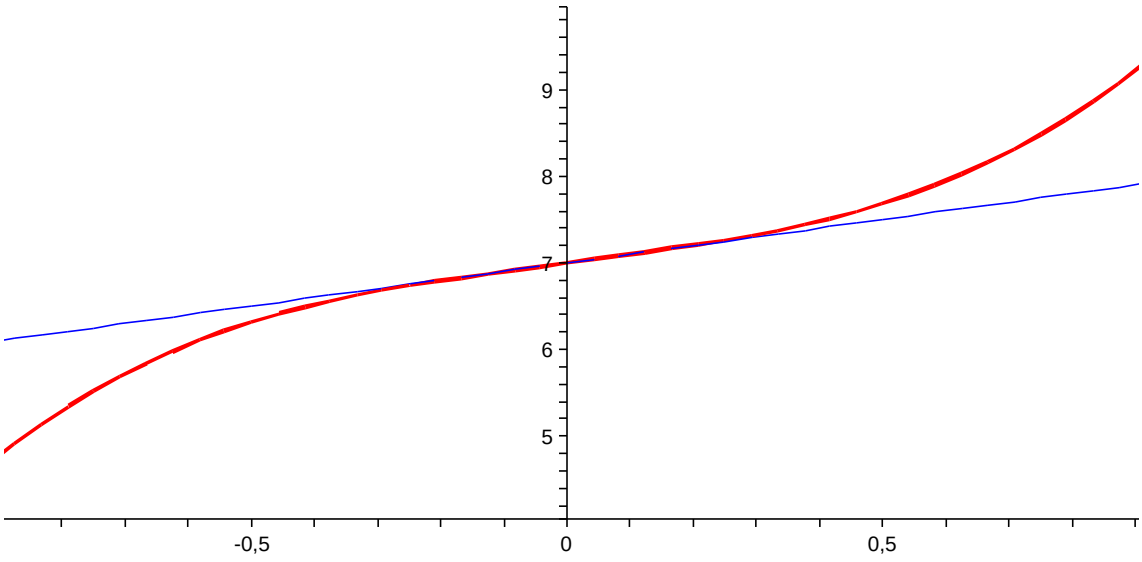
$$(\Delta) \qquad y = a_0 + a_1(x-x_0)$$

Si $c \neq 0$ **Alors** *la position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $c(x-x_0)^n$* ♣

Exercice: le prouver

Exemple: la fonction $x \mapsto x+7+x^3+x^4\sin(\frac{1}{x})$ traverse sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x+7$

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro



De même lorsque f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$, alors par définition $f(x) - ax - b \in DL_0(+\infty)$, en poussant le développement asymptotique à un ordre supérieur on voit que :

Proposition 17.5.2 (Etude des Asymptotes)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f vérifiant

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}) \quad (lorsque \ \ x \to +\infty)$$

Alors *le graphe Γ de f admet pour asymptote oblique en $+\infty$:*

$$(\Xi) \qquad y = ax + b$$

Si $c \neq 0$ **Alors** *la position de Γ par rapport à Ξ est donnée par le signe de $\frac{c}{x^n}$*

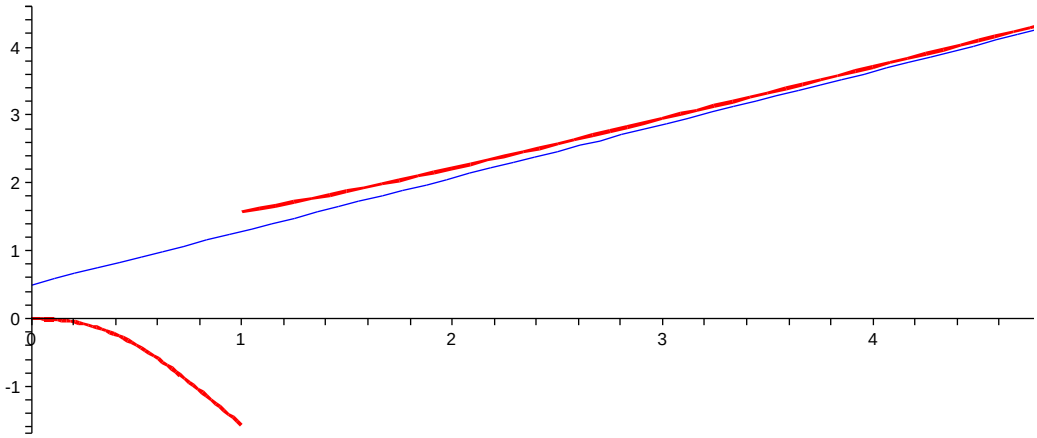
Le résultat analogue est vrai en $-\infty$ ♣

Exercice: le prouver

Exemple: la fonction $x \mapsto 2x + 3 + \frac{2+e^{-x}\sin x}{x^4}$ est au dessus de son asymptote oblique en $+\infty$. Cette asymptote a pour équation $y = 2x + 3$.

Exemple: la fonction $x \mapsto x \arctan(\frac{x}{x-1})$ est au dessus de son asymptote oblique $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$ puisque

$$x \arctan(\frac{x}{x-1}) - (\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}) \sim \frac{1}{4x} \quad lorsque x \to +\infty$$



Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

17.5.2 Cas des courbes

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^k avec pour tout $t \in I$, $f(t) = (x(t), y(t))$. Soit $M(t_0)$ un point du support Γ de (I, f), tel que pour un certain $n \in [\![1, k]\!]$ on ait $\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$

Proposition 17.5.3 (Tangente)
Γ admet une tangente en $M_0 = M(t_0)$ dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ où p est le plus petit entier n dans $[\![1, k]\!]$ pour le quel $\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (première dérivée successive non nulle) ♣

Preuve Par Taylor-Young à l'ordre p, on a

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + (t-t_0)^p\varepsilon(t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = y(t_0) + \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + (t-t_0)^p\eta(t)$$

avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ et $\eta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$. Et donc

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) + (t-t_0)^p\overrightarrow{\rho}(t) \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{\rho}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{0}$$

D'où pour tout $t \neq t_0$ au voisinage de t_0

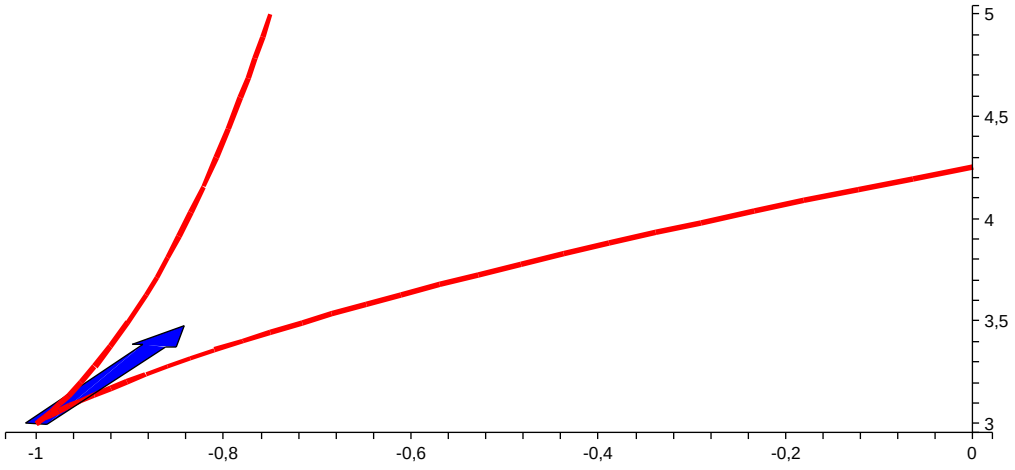
$$\delta(t) := \frac{p!}{(t-t_0)^p}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \text{dirige la corde } (M_0M)$$

Or $\delta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$, on conclut par définition de la tangente •

Exemple: Au voisinage du paramètre 1

$$f(t) := (t^2 - 2t, 2t + 1/t^2) \quad f'(t) = (2t - 2, 2 - 2/t^3) \quad \text{et} \quad f''(t) = (2, 6/t^4)$$

D'où $f(1) = (-1, 3)$ $f'(1) = (0, 0)$ et $f''(1) = (2, 6)$.
Et donc Γ admet une tangente au point singulier $M(1) = (-1, 3)$ dirigée par le vecteur $(1, 3)$



Discussion de l'allure de Γ au voisinage de $M(t_0)$

Soit p telle que ci-dessus et q le plus petit entier n dans $[\![p+1, k]\!]$ tel que

$$(\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)) \quad \text{forme une base}$$

Si q est bien défini on a alors au voisinage de t_0 $\quad X(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}$ $\quad$ et $\quad$ $Y(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!}$
Où $(X(t), Y(t))$ sont les coordonnées de $f(t)$ dans le repère $(M_0, \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0))$.

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Preuve En appliquant la formule de Taylor-Young à x et y à l'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \sum_{k=p}^{q} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + (t-t_0)^q \varepsilon(t) \quad avec \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0 \\ y(t) &= y(t_0) + \sum_{k=p}^{q} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + (t-t_0)^q \eta(t) \quad avec \quad \eta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0 \end{aligned}$$

D'où on en déduit (avec $M_0 = M(t_0)$)

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) + \sum_{k=p+1}^{q-1} \underbrace{\frac{(t-t_0)^k}{k!}\overrightarrow{f^{(k)}}(t_0)}_{\in \mathbb{R}\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0) + (t-t_0)^q \underbrace{\overrightarrow{\rho}(t)}_{\xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{0}}$$

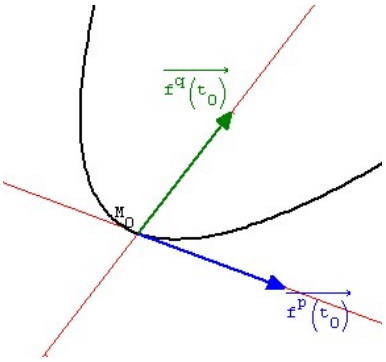
D'où en posant pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u}]_1\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) + [\overrightarrow{u}]_2\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)$, on a

$$X(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}[\overrightarrow{f^{(k)}}(t_0)]_1 + (t-t_0)^q[\overrightarrow{\rho}(t)]_1 = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o((t-t_0)^p)$$

$$Y(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + (t-t_0)^q[\overrightarrow{\rho}(t)]_2 = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q)$$

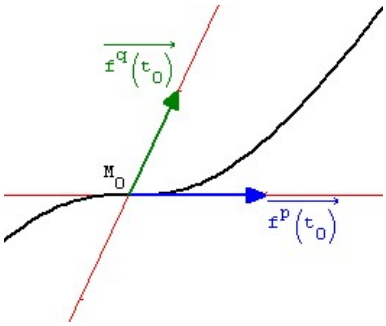
- D'où quatre allures possibles

p impair et q pair



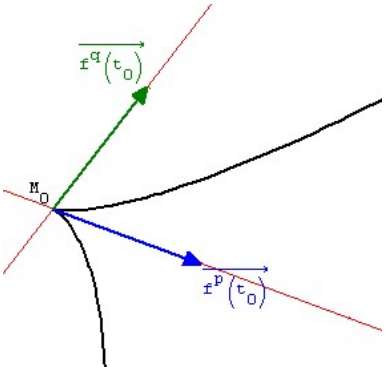
Point à allure normale

p impair et q impair



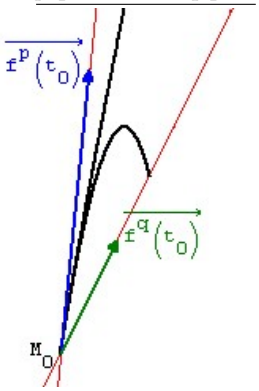
Point d'inflexion

p pair et q impair



Point de rebroussement de 1ère espèce

p pair et q pair



Point de rebroussement de 2ème espèce

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro

Remarque: Lorsque (I, f) est une courbe régulière, les points d'inflexion seront à chercher parmi les paramètres t vérifiant

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0$$

Exemple: Etudions au voisinage de $t = -2$ la courbe paramétrée Γ

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (t+1)e^t \\ y(t) & = & t^2 e^t \end{array} \right.$$

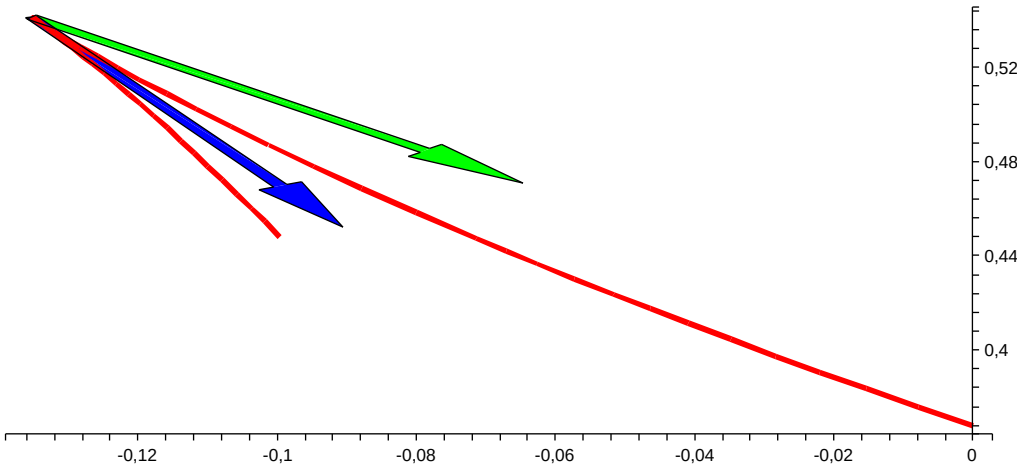
On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (t+2)e^t \\ y'(t) & = & (t^2+2t)e^t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) & = & (t+3)e^t \\ y''(t) & = & (t^2+4t+2)e^t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^{(3)}(t) & = & (t+4)e^t \\ y^{(3)}(t) & = & (t^2+6t+6)e^t \end{array} \right.$$

Puisque $f'(-2) = 0$, $M(-2) = (-e^{-2}, 4e^{-2})$ est un point stationnaire.
Comme $f''(-2) = (e^{-2}, -2e^{-2})$ Γ admet une tangent en $M(-2)$ dirigée par $(1, -2)$.
Enfin puisque

$$\det(f'', f^{(3)})(-2) = (x''y^{(3)} - y''x^{(3)})(-2) = [(t^2+6t+10)e^{2t}]_{t=-2} = 2e^{-4} \neq 0$$

$(f'', f^{[3]})$ forme une base, $M(-2)$ est donc un point de rebroussement de de 1ère espèce $(p = 2, q = 3)$



Point de rebroussement de 1ère espèce

Lycée Pierre de Fermat - Martin Del Hierro