Somme et Produit

1 Définitions

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (ou complexes) On définit par récurrence la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_0 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

Avec des notations peu rigoureuses cela revient à dire que

$$\forall n \geq 1,\quad S_n = \underbrace{a_0 + \ldots + a_n}_{n+1 \text{ termes}}$$

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{def}{=} S_n$$

Remarque 1.1 *Faites attention aux indices et aux variables. Ici n est une variable en revanche k est un indice. k est une variable muette car elle joue le rôle de compteur pour étiqueter les termes $a_0, \ldots, a_n$* *

Exercice 1. Donner la caractérisation par récurrence de la suite $(S_n{}')_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1,\ S_n{}' = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Remarque 1.2 *La notation $\sum$ peut s'étendre à d'autres formes d'étiquettes. Ainsi si I désigne un ensemble d'étiquettes en quantité finie et $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels (ou complexes) indexée par l'ensemble I. La quantité*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i$$

désigne la somme de tous les élèments de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ *

Exercice 2. Calculez en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$, la quantité

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ pair}}} (-1)^i$$

On définit par analogie avec la somme le produit. la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$P_0 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n \times a_{n+1}$$

Avec des notations peu rigoureuses cela revient à dire que

$$\forall n \geq 1,\quad P_n = \underbrace{a_0 \times \ldots \times a_n}_{n+1 \text{ termes}}$$

On note alors[1]

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \prod_{k=0}^{n} a_k \overset{def}{=} P_n$$

Exercice 3. Ecrivez sous forme d'un produit la quantité 2006!

[1]Par convention : $\sum_{i\in\emptyset} \cdot_i = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i\in\emptyset} \cdot_i = 1$

2 Manipulations

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles indexées respectivement par I et J, soit λ un réel quelconque.
D'après les règles de calcul classiques sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ on a, lorsque ces expressions ont un sens :

Distributivité

$$\lambda \times \left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda \times a_i \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^{\lambda} = \prod_{i\in I} a_i^{\lambda}$$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \times b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \times b_j$$

Regroupement par paquets

Si I *et* J sont disjoints **Alors**

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{j\in J} a_j\right) = \sum_{k\in I\cup J} a_k \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{j\in J} a_j\right) = \prod_{k\in I\cup J} a_k$$

Changement d'indice
Soit $\varphi : I \to J$ une application telle que J soit l'ensemble des valeurs images de I par φ (ce qu'on note abusivement par $J = \{\varphi(i), i \in I\}$) et telle que I et J aient même nombre d'éléments (on dira alors que φ est bijective). le changement d'indice dans une somme s'écrit alors

Si $\varphi : I \to J$ bijective **Alors** $\displaystyle\sum_{i\in I} a_{\varphi(i)} = \sum_{j\in J} a_j$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_{\varphi(i)} = \prod_{j\in J} a_j$

Exercice 4. En appliquant la formule de la somme d'une suite arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Calculez la somme $(1) + (1+\pi) + (1+2\times\pi) + \ldots (1+2006\times\pi)$

Exercice 5. En utilisant les propriétés du symbole $\sum$, montrez la formule de la somme d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 6. En appliquant la formule du binôme de Newton (où a et b sont deux réels ou complexes quelconques)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Calculez la somme $2 + 2\times 2006 + 2\times C_{2006}^{2} + \ldots + 2\times C_{2006}^{1002} + C_{2006}^{1003}$