Branches Infinies

Sauf mention du contraire, les équations cartésiennes s'exprimeront en (X, Y).

1 Définitions

Le Plan est rapporté à un r.o.n.d. et on note x, y les coordonnées de f.
Considérons (I, f) un arc paramétré C^0 avec $I = <\alpha, \beta>$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Dans la pratique on restreint l'ensemble d'étude à un intervalle.

Définition 1.1 *Soit $\omega \in \{\alpha, \beta\}$. On dit que (I, f) admet une branche infinie en ω lorsque :*

$$\lim_{t \to \omega} \|\overrightarrow{Of(t)}\| = +\infty$$

Remarque: *Cette définition est indépendante du choix de O.* ♠

Définition 1.2 *Soit (I, f) admettant une branche infinie en ω.*
On dira que la droite Δ d'équation en (X, Y) $\quad aX + bY + c = 0$
*est **l**'asymptote à la courbe en ω lorsque*

$$\lim_{t \to \omega} d(M(t), \Delta) = 0$$

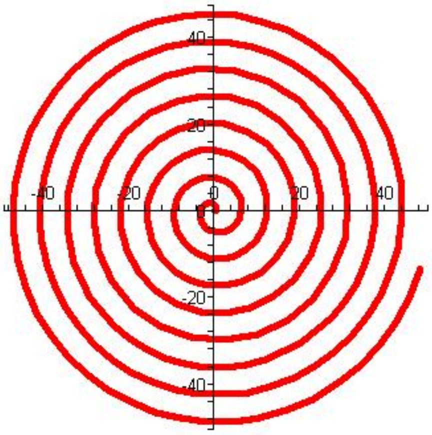
Où $M(t)$ désigne le point de la courbe de paramètre t. ♠

Remarque: lorsqu'elle existe l'asymptote est unique.

Proposition 1.1 *la droite Δ d'équation* $\quad aX + bY + c = 0$
est une asymptote de (I, f) en ω si et seulement si $\displaystyle\lim_{t \to \omega} ax(t) + by(t) + c = 0$

Et dans ce cas la position relative de son support relativement à Δ est donnée par le signe de $ax(t) + by(t) + c$ pour t au voisinnage de ω ♣

Exemple: Dans le cas $f(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $(\mathbb{R}, f)$ admet une branche infinie en $+\infty$



2 Courbes paramétrées cartésiennes

Notons Γ le support de la courbe (I, f). On suppose dans ce paragraphe que (I, f) admet une branche infinie en ω.

Définition 2.1 (Branches Paraboliques)
On dira que (I, f) admet pour direction la droite asymptotique Ξ d'équation $\quad Y = aX$
Lorsque $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\omega]{} a \in \mathbb{R}$
Si de plus $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$, (I, f) admet une branche parabolique de direction Ξ.
Lorsque $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$, *on parlera de branche parabolique suivant l'axe des ordonnées.* ♠

Remarque 2.1 $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} b$ *si et seulement si*
la courbe (I, f) admet une asymptote oblique Υ en ω d'équation : $\quad Y = aX + b$

$y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$ *si et seulement si*
(I, f) admet en ω une branche de branche parabolique de direction $Y = aX$

La position relative de Γ relativement à l'asymptote Υ s'obtient en regardant le signe de l'expression $y(t) - (ax(t) + b)$ avec t au voisinnage de ω $\ast$

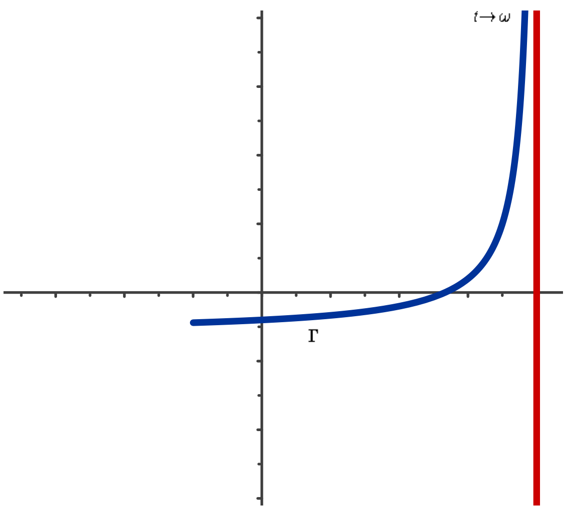
Méthode

Afin de déterminer le comportement asymptotique d'une courbe, nous présentons ici une liste non exhaustive de comportements possibles

$$\text{"}x(t) \quad \text{ou} \quad y(t)\text{"} \xrightarrow[t\to\omega]{} \ell \in \mathbb{R}$$

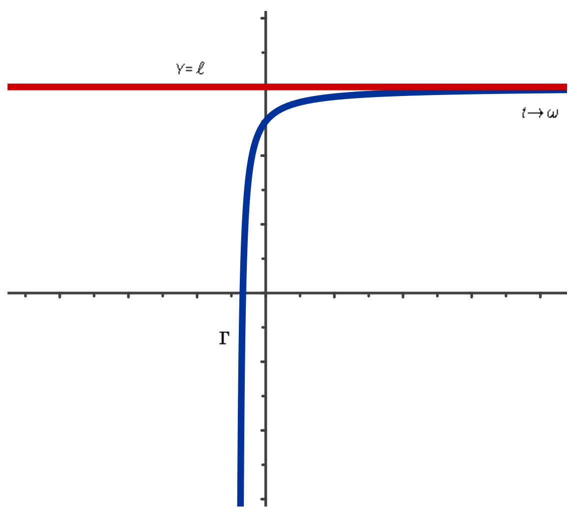
• **Si** $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\omega]{} (\ell, \pm\infty)$

Alors (I, f) admet une asymptote verticale d'équation $X = \ell$.



• **Si** $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\omega]{} (\pm\infty, \ell)$

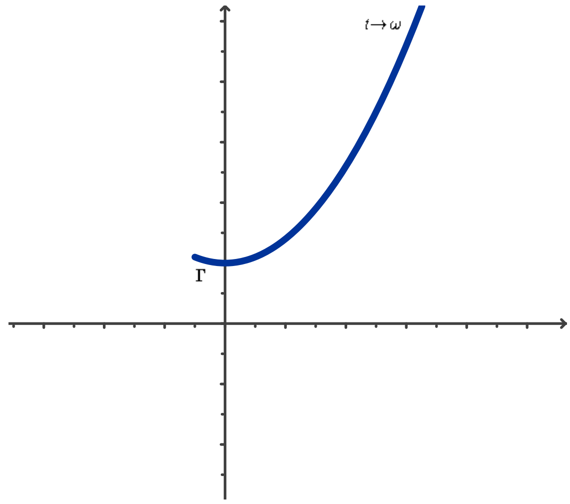
Alors (I, f) admet une asymptote horizontale d'équation $Y = \ell$.



$$x(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$$

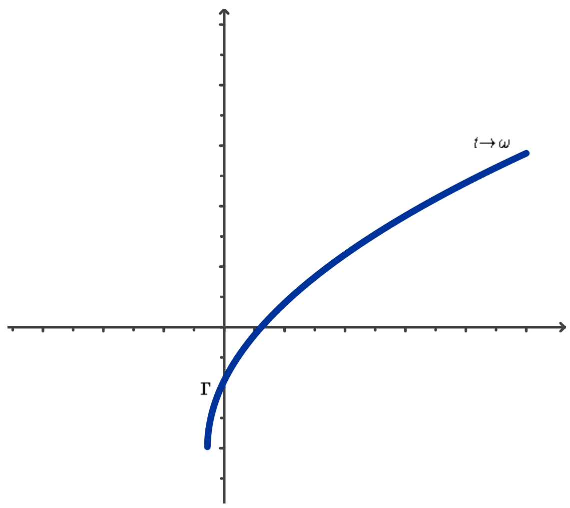
- **Si** $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$

Alors (I, f) admet branche parabolique suivant l'axe des ordonnées.



- **Si** $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\omega]{} 0$

Alors (I, f) admet branche parabolique suivant l'axe des abscisses.

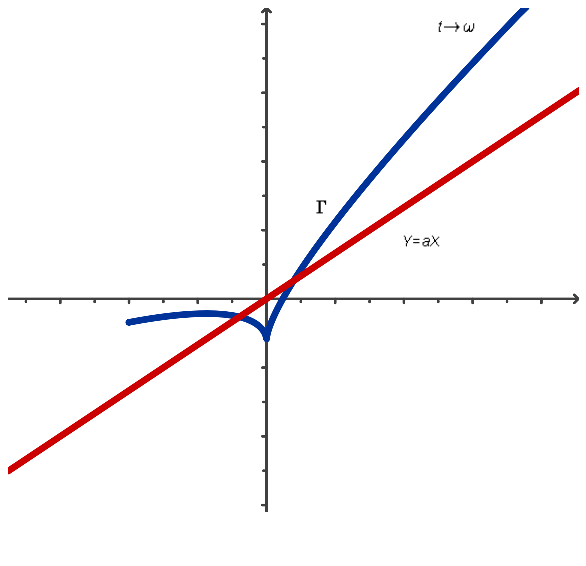


- **Si** $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to\omega]{} a \in \mathbb{R}^*$

Si $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} \pm\infty$

Alors (I, f) admet une branche parabolique de direction :

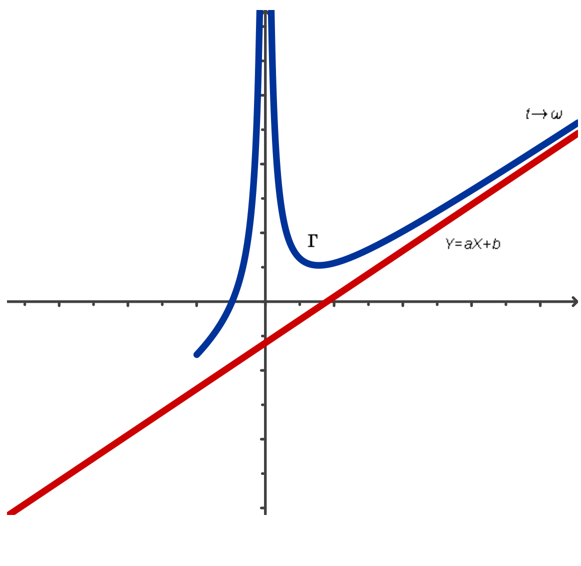
$(\Xi) \qquad Y = aX$



Si $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to\omega]{} b \in \mathbb{R}$

Alors (I, f) admet une asymptote oblique d'équation :

$(\Upsilon) \qquad Y = aX + b$



3 Caractérisation dans la cas des Graphes

Soit φ une fonction donnée.
On considère la courbe paramétrée associée (I, f) avec $f(t) = (t, \varphi(t))$. On peut traduire ce qui vient d'être défini pour le graphe Γ de la fonction φ.
Dans cette section les équations cartésiennes s'exprimeront relativement au couple (x, y).

Définition 3.1 *Soit φ dont le graphe est noté Γ. Lorsque le point $M(x, y) \in \Gamma$ s'éloigne à l'infini, i.e $x \to \infty$ ou $y \to \infty$, on dit que Γ admet une branche infinie.*

Plus précisément :
Si $(x, \varphi(x)) \to (\omega, \pm\infty)$ *avec* $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *on dira que φ admet une branche infinie en ω*
Si $(x, \varphi(x)) \to (\pm\infty, \omega)$ *avec* $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *on dira que φ admet une branche infinie en $\pm\infty$*
♠

Exemple: la fonction $\varphi(x) = \frac{3}{x} + e^x$ admet trois branches infinies en $-\infty, 0$ et $+\infty$

Remarque 3.1 *Lorsque Γ admet une branche infinie en un point fini ℓ, on dira que Γ admet une asymptote verticale Δ d'équation*

$$(\Delta) \qquad x = \ell$$

Lorsque φ admet une limite finie ℓ en $\pm\infty$, on dira que Γ admet une asymptote horizontale Δ d'équation

$$(\Delta) \qquad y = \ell$$

∗

Exemple: La fonction $\varphi(x) = \frac{2x}{x-1}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = 2$. Elle admet aussi $x = 1$ pour asymptote verticale.

Définition 3.2 *Soit φ une fonction dont le graphe Γ admet une branche infinie en $\pm\infty$.*
On dira qu'il s'agit d'une direction asymptotique d'équation

$$(\Xi) \qquad y = ax \qquad \textit{lorsque} \quad \frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} a$$

Si de plus $\varphi(x) - ax \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, on dit que Γ admet une branche parabolique de direction Ξ.

Lorsque $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, on parlera de branche parabolique suivant l'axe des ordonnées. ♠

Exemple: la fonction $\varphi(x) = (2x + \sqrt{|x|})(1 + e^{-x})$ admet une direction asymptotique d'équation $y = 2x$ en $+\infty$ et une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées en $-\infty$.

Définition 3.3 *On dira que le graphe Γ de la fonction φ de graphe admet une asymptote oblique Υ en $\pm\infty$ d'équation :*

$$(\Upsilon) \qquad y = ax + b \qquad \textit{lorsque} \quad \varphi(x) - (ax + b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

Lorsque $\varphi(x) - ax \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, on parlera de branche parabolique de direction $y = ax$. ♠

Exemple: la fonction

$$\varphi(x) = (2x + \sqrt{|x|}) - 2\frac{\sqrt{|x|}}{e^x + 1}$$

admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 3$ en $+\infty$ et une branche parabolique de direction $y = 2x$ en $-\infty$.

Méthode

Afin de déterminer le comportement asymptotique d'un graphe, nous présentons ici une liste non exhaustive de comportements possibles

- En un point fini α **Si** $\varphi(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \pm\infty$ **Alors** φ admet une asymptote verticale en α.
- En un point infini par exemple le cas $+\infty$ (le cas $-\infty$ étant similaire).

1er Cas : $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \beta$

Alors Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \beta$.

2ème Cas : $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$

* **Si** $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$
Alors Γ admet branche parabolique suivant l'axe des ordonnées.

* **Si** $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$
– **Si** $\varphi(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ **Alors** Γ admet une branche parabolique de direction

$$(\Xi) \qquad y = ax$$

– **Si** $\varphi(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b \in \mathbb{R}$ **Alors** Γ admet une asymptote oblique d'équation :

$$(\Upsilon) \qquad y = ax + b$$

4 Courbes en Polaires

On s'intéresse à une courbe polaire de la forme dont la paramétrisation est donnée (en coordonnées polaires) par $\theta \mapsto (\rho(\theta), \theta)$.

Remarque: Rappelons la paramétrisation cartésienne :

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta)$$

Remarque: Cette courbe admet une branche infinie en θ_0 si et seulement si

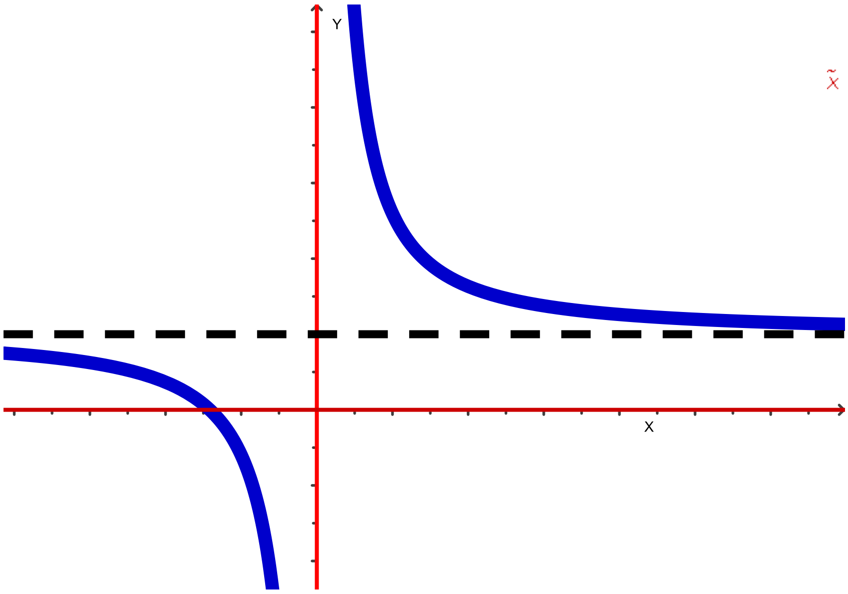
$$\lim_{\theta\to\theta_0} |\rho(\theta)| = +\infty$$

4.1 Cas où $\theta_0 = 0$

l'axe polaire (Ox) sera la direction asymptotique éventuelle (car $\lim_{\theta\to 0} |x(\theta)| = +\infty$).

$Y = \ell$ est l'équation de l'asymptote si et seulement si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} y(\theta) = \ell$

Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} y(\theta) = \pm\infty$ **Alors** la courbe admet une branche parabolique de direction Ox

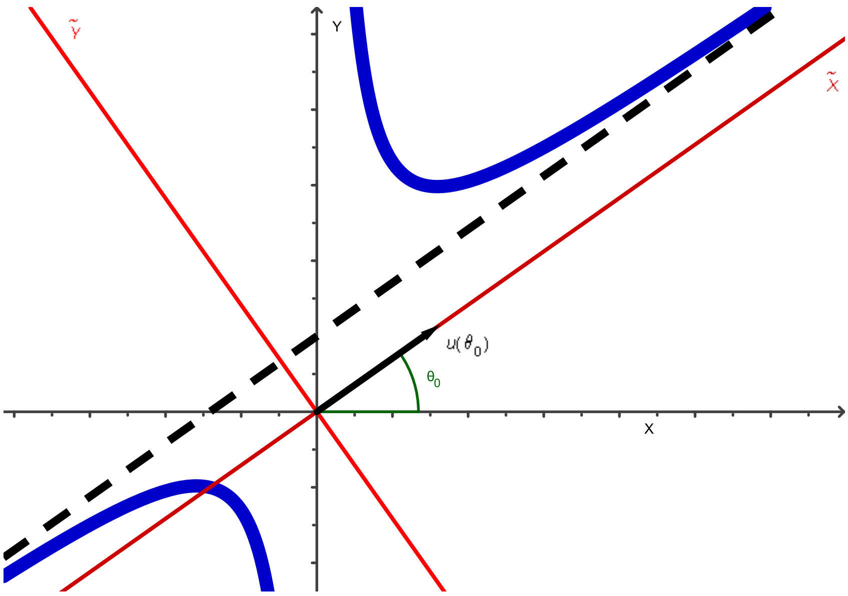


4.2 Cas général

l'axe de direction θ_0 est la direction asymptotique éventuelle.

Par une rotation d'angle θ_0 on se ramène au cas :
- Nouveau repère $\widetilde{\mathcal{R}} := (O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$ (c'est l'ancien repère tourné de θ_0 : $\mathcal{R}_{\theta_0}$)
- Nouvelle paramétrisation polaire : $\widetilde{\rho}(\theta) := \rho(\theta + \theta_0)$
- Une nouvelle paramétrisation cartésienne (dont la branche infinie est en $\theta \to \theta_0$)[1] :

$$\widetilde{x}(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad \widetilde{y}(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$



Dans la pratique :

Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = \ell$ **Alors** $Y = \ell$ est l'équation de l'asymptote relativement à $\widetilde{\mathcal{R}}$

Le signe de $\theta \mapsto \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) - \ell$ au voisinage de θ_0 détermine la position relative courbe/asymptote

[1] ou encore $\widetilde{x}(\theta) = \rho(\theta + \theta_0)\cos(\theta)$ et $\widetilde{y}(\theta) = \rho(\theta + \theta_0)\sin(\theta)$ dont la branche infinie est en $\theta \to 0$