Suites Récurrentes

1 Cas d'une fonction Continue

Nous nous proposons de regarder le cas de suites récurrentes particulières c'est à dire celles caractérisées par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

et $u_0 = m$ où m est un réel fixé, et $f : I \longrightarrow I$ est une fonction définie sur un intervalle I.

Remarque 1.1 *c'est bien parce que $f(I) \subset I$, que u est bien définie* $*$

Définition 1.1 (Fonction Continue)
Soit $f : I \longrightarrow F$, une fonction définie sur un intervalle ouvert I, à valeurs dans un ensemble F. Si $l \in I$, on dira que f est continue en l, lorsque (voir Chapitre sur les fonctions) :

($\star$) *Quelle que soit la suite u à valeurs dans I et convergeant vers l, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$*

En particulier, on dira que f est continue sur I (intervalle quelconque), lorsque ($\star$) est vérifié quel que soit $l \in I$ ♠

Exemple: les fonctions polynômes, trigonométriques, exponentiel, logarithme et racine carrée sont continues sur $\mathbb{R}$. De même la somme, le produit et l'inverse de toute fonction continue jamais nulle, est continue sur $\mathbb{R}$

Dans notre étude nous supposons la fonction f **continue** sur I.
Ainsi, lorsque l'intervalle I est **fermé**, les seules limites finies possibles (si elles existent) pour la suite u, seront les $l \in I$ telles que

$$f(l) = l$$

2 Cas d'une fonction Monotone

2.1 Cas d'une fonction f croissante

Nous supposons ici I **bornée**

Lemme 2.1 *Si la fonction f est croissante la suite u est monotone, le sens de monotonie étant donné par le signe de $f(u_0) - u_0$* ♣

On en déduit alors que u est monotone bornée et donc convergente

2.2 Cas d'une fonction f décroissante

Cette fois-ci nous ne pouvons rien dire de la monotonie de u. En revanche la fonction $g = f \circ f$ étant croissante, nous pouvons grâce au paragraphe précédent en déduire la monotonie de la suite

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = g(v_n)$$

et de même pour la suite

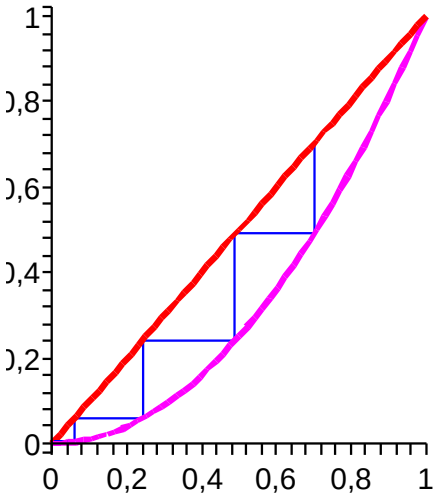
$$w_0 = u_1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = g(w_n)$$

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

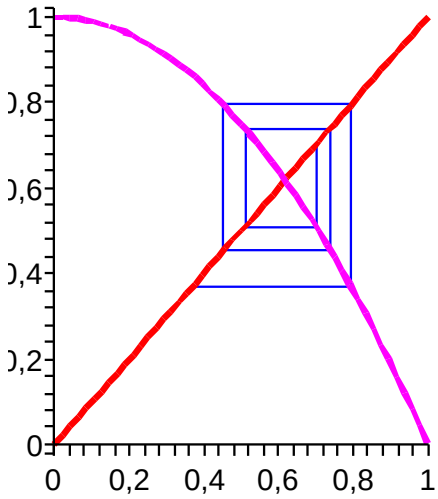
En fait, on peut montrer que ces deux suites ont des sens de variations contraires.
S'agissant de suites monotones bornées elles convergent vers deux limites finies l_1 et l_2

Or vu que $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et que $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on voit que u converge uniquement dans le cas où $l_1 = l_2$ et dans ce cas $\lim u = l_1$

. f croissante



. f décroissante



2.3 Méthodologie

Sans prétendre être exhaustif voici quelques méthodes pour parvenir à l'étude de suites récurrentes :
Comme on l'a vu précédemment, on se ramène à l'étude de suites du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

Où $f : I \longrightarrow I$ est croissante continue sur le segment I.

Pour montrer la monotonie de la suite u, trois méthodes s'offrent à nous

2.3.1 Utiliser la croissance de f

En effet, si par exemple $u_0 \leq u_1$ (par un calcul immédiat), il suffit de prouver par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

car en effet

$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Exercice: Montrer que la suite $u_{n+1} = u_n^3$ avec $u_0 = 1/2$ est décroissante.

2.3.2 Utiliser les propriétés algébriques de u

Il s'agit d'exprimer la quantité $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n - u_{n-1}$ et ainsi, exhiber le fait que ces deux expressions sont de même signe. On conclut alors par une simple récurrence que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$

Exercice: Montrer la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ avec $u_0 = 1/2$ est croissante.

2.3.3 Position de f par rapport à la bissectrice

Cette dernière méthode est plus difficile à appliquer que les deux autres, car il s'agit d'utiliser des propriétés fines de la fonction f.
Ainsi si l'on peut déterminer un sous-intervalle $J \subset I$, contenant u_0 et tel que par exemple :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \geq x$$

Il s'agira alors dans un deuxième temps de verifier si la suite u est à valeurs dans J (soit par récurrence, soit en montrant que $f(J) \subset J$).
On aura alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in J \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$$

On a le résultat inverse lorsque $\forall x \in J, \quad f(x) \leq x$

Exercice: Montrer la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ avec $u_0 = 1/2$ est croissante, (prendre $J = [0, 1]$)

3 Cas d'une fonction contractante

Définition 3.1 *Soient $f : I \to I$ et $k \in [0, 1[$. On dit que f est k-contractante lorsque*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

♠

Exemple: D'après l'inégalité des accroissements finis toute fonction f dérivable sur I, dont la dérivée f' vérifie

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq k$$

avec $k \in [0, 1[$, est une fonction k-contractante.

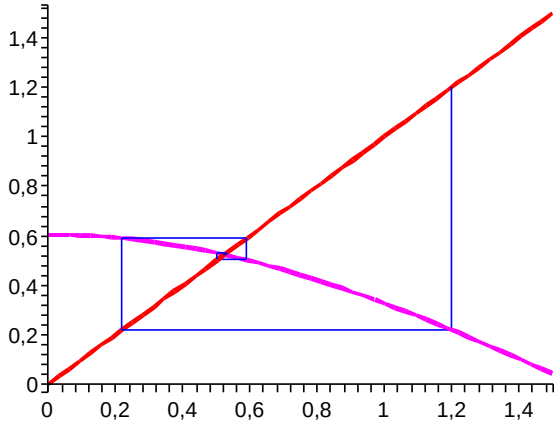
Proposition 3.1 *Suppons f k-contractante, admettant ℓ pour point fixe, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

♣

Remarque: En particulier $\lim u = \ell$

Exercice: Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos(u_n)$



Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro