Primitives Usuelles

1 Fonctions usuelles

la première colonne contient l'expression de la fonction f au point x, la troisième contient l'intervalle I d'étude et la deuxième l'expression des primitives sur cet intervalle.
C est une constante ne dépendant que du choix de f **et** de l'intervalle I

$f(x)$	$F(x)$	I
$\exp(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha x)+C$	$\mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$	$\mathbb{R}_+^*$ $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ $(n \in \mathbb{Z})$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$	$\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\mathrm{cotan}\,(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert+C$	$]k\pi,(k+1)\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x)+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x)+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\,(x)$	$\ln\lvert\mathrm{ch}\,(x)\rvert+C$	$\mathbb{R}$
$1/\cos^2(x)$	$\tan(x)+C$	$\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$1/\mathrm{ch}\,^2(x)$	$\mathrm{th}\,(x)+C$	$\mathbb{R}$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x)+C$	$\mathbb{R}$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)+C$	$]-1,1[$
$1/(1-x^2)$	$\mathrm{Argth}\,(x)+C$	$]-1,1[$
$1/\sqrt{1+x^2}$	$\mathrm{Argsh}\,(x)+C$	$\mathbb{R}$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\mathrm{Argch}\,(x)+C$	$]1,+\infty[$

Exercice: Calculer des primitives, dans des intervalles convenables, de :
$x \mapsto 1/\sin^2 x$, $\quad x \mapsto \mathrm{cotan}\,^2 x$, $\quad x \mapsto \tan^2 x$ et $x \mapsto \mathrm{th}\,^2 x$

Exercice: Montrer que pour $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ une primitive F sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ s'écrit

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

2 Dilatations - Translations et Réductions

⋆ *Changement de variable*

Si f admet une primitive F sur I et $\varphi \in C^1(I)$ **Alors** $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admet $F\circ\varphi$ pour primitive

Exemple: **Si** u est de classe C^1 **Alors** :

- $t \mapsto \ln|u(t)|$ est une primitive de $t \mapsto \frac{u'(t)}{u(t)}$
- $t \mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}(t)}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{u'(t)}{u^n(t)}$ $\quad (n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\})$

⋆ *Translation-Dilatation*

Si f est continue sur I et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ **Alors**

$$\forall (a,u) \in I^2, \quad \int_a^u f(\alpha t+\beta)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{(a-\beta)/\alpha}^{(u-\beta)/\alpha} f(x)dx$$

⋆ *Réduction*

Si f_n et g_n sont de classe C^1 **Alors** :
le calcul d'une primitive Ψ_n de $f'_n g_n$ se ramène à celui d'une primitive de $f_n g' n$.
En particulier lorsque f_n, g_n sont de types polynômiales ou trigonométriques ou hyperboliques... **Alors** Ψ_n peut vérifier une relation de récurrence linéaire.

Exemple: Fixons $x \in \mathbb{R}$, et posons Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1+t^2)^n}\right)dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2nI_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n(x)$
Et donc de proche en proche

$$I_0(x) = x, \quad I_1(x) = \arctan(x), \quad I_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(x), \quad I_3(x) = \dots$$

3 Cas des fonctions trigonométriques et hyperboliques

3.1 Fonction exponentielle

Calcul des primitives de $t \mapsto P(t)\exp(\alpha t)$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et P polynômiale)

⋆ *IPP successives*

En dérivant successivement la partie polynômiale et intégrant successivement la partie exponentielle, on se ramène au calcul d'une primitive d'une exponentielle.

Exemple:

$$F(u) := \int_1^u t^2 e^{(5+2i)t} dt = \int_1^u t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i}\right) dt = \left[t^2 \frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i}\right]_1^u - \int_1^u 2t \frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i} dt$$

Or

$$\int_1^u t e^{(5+2i)t} dt = \int_1^u t \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i}\right) dt = \left[t \frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i}\right]_1^u - \int_1^u \frac{e^{(5+2i)t}}{5+2i} dt$$

Donc

$$F(u) = \frac{1}{5+2i}\left[t^2 e^{(5+2i)t}\right]_1^u - \frac{2}{(5+2i)^2}\left[t e^{(5+2i)t}\right]_1^u + \frac{2}{(5+2i)^3}\left[e^{(5+2i)t}\right]_1^u$$

⋆ Coefficients indéterminés

On cherche une primitive sous la forme : $t \mapsto Q(t)\exp(\alpha t)$ avec $\deg Q = \deg P$.
Le calcul se ramène à la détermination des coefficients de Q grâce à

$$\frac{d}{dt}\left(Q(t)\exp(\alpha t)\right) = P(t)\exp(\alpha t)$$

Exemple: soit $F : t \mapsto (at^2 + bt + c)e^{(1+2i)t}$ une primitive de $f : t \mapsto t^2 e^{(1+2i)t}$, on par identification entre f et F'

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [(1+2i)(at^2+bt+c) + (2at+b)]e^{(1+2i)t} = t^2 e^{(1+2i)t}$$

Et donc par identification des coefficients dans l'égalité polynomiale

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+2i)at^2 + ((1+2i)b + 2a)t + (1+2i)c + b = t^2$$

On trouve

$$F : t \mapsto \frac{25(-1+2i)t^2 - 10(3+4i)t + 2(11-2i)}{125}\, e^{i(1+2i)t}$$

Remarque 3.1
Par le biais des parties réelles et imaginaires, on en déduit le calcul des primitives des fonctions

- $t \mapsto P(t)\exp(\beta t)\cos(\alpha t)$ *(avec α, β dans $\mathbb{R}$ et P polynômiale réelle)*
- $t \mapsto P(t)\exp(\beta t)\sin(\alpha t)$ *(avec α, β dans $\mathbb{R}$ et P polynômiale réelle)*

*

Exemple: Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x t^2 e^t \cos 2t = Re\left(\int_0^x t^2 e^{i(1+2i)t}\right) = \frac{\exp(x)}{125}\left((25x^2 + 30x - 22)\cos(2x) + (50x^2 - 40x - 4)\sin(2x) + 22\right)$$

3.2 Polynomes trigonométriques

Calcul des primitives de $t \mapsto \cos^n t \sin^p t$ (avec n, p dans $\mathbb{N}$)

⋆ Linéariser

Exemple:

$$\int_0^u \cos^2 t\, dt = \int_0^u \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^u$$

⋆ Changement de variable

- lorsque n impair faire le changement de variable $x = \sin(t)$
- lorsque p impair faire le changement de variable $x = \cos(t)$

Exemple: Posons $x = \cos t$ et $dx = -\sin t dt$

$$\int_0^u \cos^4 t \sin^3 t\, dt = -\int_0^u \underbrace{\cos^4 t(1-\cos^2 t)}_{x^4(1-x^2)} \times \underbrace{(-\sin t)dt}_{dx} = -\int_1^{\cos u} x^4(1-x^2)dx = -\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\Big]_1^{\cos u}$$

Remarque: les règles analogues existent pour les fonctions hyperboliques

3.3 Fractions rationnelles trigonométriques

Calcul des primitives de $f : t \mapsto R(\cos t, \sin t)$ (R une fraction rationnelle de deux variables)

⋆ Régles de Bioche

Si "l'élément différentiel" $f(t)dt$ est invariant par :
- $t \mapsto -t$, on fait le changement de variable $x = \cos t$
- $t \mapsto \pi - t$, on fait le changement de variable $x = \sin t$
- $t \mapsto \pi + t$, on fait le changement de variable $x = \tan t$

Exemple: Posons $x = \cos t$ et $dx = -\sin t\, dt$ dans

$$\int_0^u \frac{1+\cos t}{1+\sin^4 t} \sin t\, dt \quad car \quad \frac{1+\cos(-t)}{1+\sin^4(-t)} \sin(-t)\, d(-t) = \frac{1+\cos t}{1+\sin^4 t} \sin t\, dt$$

on trouve

$$\int_0^u \frac{1+\cos t}{1+\sin^4 t} \sin t\, dt = -\int_0^u \underbrace{\frac{1+\cos t}{1+(1-\cos^2 t)^2}}_{\frac{1+x}{1+(1-x^2)^2}} \underbrace{(-\sin t)dt}_{dx} = -\int_1^{\cos u} \frac{1+x}{1+(1-x^2)^2}\, dx$$

Remarque 3.2 *Les règle de Bioche dans le cas hyperbolique* $t \mapsto R(ch t, sh t)$ *s'appliquent en regardant les invariances l'élément différentiel* $R(\cos t, \sin t)dt$.
On en déduit le changement de variable à appliquer : $x = ch t$, $x = sh t$ *ou* $x = th t$ $*$

Exemple: Posons $x = \operatorname{sh} t$ et $dx = \operatorname{ch} t\, dt$ dans

$$\int_0^u \frac{1+\operatorname{sh} t \operatorname{ch}^4 t}{\operatorname{ch} t}\, dt \quad car \quad \frac{1+\sin(\pi-t)\cos^4(\pi-t)}{\cos(\pi-t)}\, d(\pi-t) = \frac{1+\sin t\cos^4 t}{\cos t}\, dt$$

on trouve

$$\int_0^u \frac{1+\operatorname{sh} t \operatorname{ch}^4 t}{\operatorname{ch} t}\, dt = \int_0^u \underbrace{\frac{1+\operatorname{sh} t \operatorname{ch}^4 t}{\operatorname{ch}^2 t}}_{\frac{1+x(1+x^2)^2}{1+x^2}} \underbrace{\operatorname{ch} t\, dt}_{dx} = \int_1^{\operatorname{sh} u} \frac{1+x(1+x^2)^2}{1+x^2}\, dx$$

⋆ Passage à l'arc-moitié

En tenant compte du domaine d'intégration, on fait le changement de variable

$$x = \tan\frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2dx}{1+x^2} = dt$$

On utilise alors les formules de l'arc-moitié pour se ramener à une fraction rationnelle en t

Exemple: En posant $x = \tan t$ et $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, on trouve, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall u \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad \int_0^u \cos^{2n-2} t dt = \int_0^{\tan u} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = I_n(\tan u)$$

⋆ Passage à l'exponentiel

On exprime la fraction rationnelle $R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ sous forme d'une fraction rationnelle en $\exp(t)$.
On se ramène au calcul de primitive d'un fraction rationnelle en t par le changement de variable

$$x = \exp(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{x} = dt$$

Exemple:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\operatorname{sh} t + 1}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^t - e^{-t} + 2}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1 + 2e^t}{e^{2t} + 1}$$

D'où par le changement de variable $x = \exp(t)$ et $dx = e^t dt$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sh} t + 1}{\operatorname{ch} t} dt = \int_0^u \frac{e^{2t} - 1 + 2e^t}{e^t(e^{2t}+1)} e^t dt = \int_1^{e^u} \frac{x^2 - 1 + 2x}{x(x^2+1)} dx$$

4 Cas des fractions rationnelles

Calcul des primitives de $f : t \mapsto R(t)$
(avec R une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Proposition 4.1 (Admis)
Toute fraction rationnelle s'écrit comme combinaison linéaire de de fractions rationnelles du type

- ✓ (0) *Polynomiale*
- ✓ (1) $R : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$ *définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ($a \in \mathbb{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$)
- ✓ (2) $R : t \mapsto \frac{\lambda t + \mu}{(t^2+at+b)^n}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ (a, b, λ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$)

♣

4.1 Cas d'un élément du type (1)

Calcul des primitives de $f : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ($a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

Exemple:

$$\int_0^x \frac{dt}{(t-i)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(t-i)^2} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{dt}{t-i} = \int_0^x \frac{t}{t^2+1} dt + i \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + i \arctan(t)$$

⋆ *Cas d'un élément du type* (1)

En notant F une primitive sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\textbf{Si } n \geq 2 \quad \textbf{Alors } F : x \mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (C \in \mathbb{K})$$

$$\textbf{Si } n = 1 \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R} \quad \textbf{Alors } F : x \mapsto \ln|x-a| + C \quad (C \in \mathbb{K})$$

$$\textbf{Si } n = 1 \quad \text{et} \quad a \notin \mathbb{R} \quad \textbf{Alors } f : t \mapsto \frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{de type (2)}$$

4.2 Cas d'un élément du type (2)

Calcul des primitives de $f : t \mapsto \frac{t+\lambda}{(t^2+at+b)^n}$ définie sur $\mathbb{R}$ $(a, b, \lambda$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

⋆ *Cas simples*

Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}^*$, avec des notations évidentes

$$\int_0^x \frac{2t+a}{t^2+at+b}dt = \ln\left|x^2+ax+b\right| + C$$

$$\textbf{Si } n \geq 2 \quad \textbf{Alors } \int_0^x \frac{2t+a}{(t^2+at+b)^n}dt = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}} + C$$

Par translation-dilatation les deux intégrales ci-dessous se déduisent l'une de l'autre

$$\int_0^x \frac{dt}{((t-\gamma)^2+\delta)^n} \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Exemple:

$$\int_0^x \frac{2t+5}{t^2+5t+12}dt = \ln(x^2+5x+12) - \ln(12) \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{2t+5}{(t^2+5t+12)^2}dt = \frac{1}{12} - \frac{1}{t^2+5t+12}$$

⋆ *Cas général*

On peut trouver $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\lambda t+\mu}{(t^2+at+b)^n} = \alpha\frac{2t+a}{(t^2+at+b)^n} + \frac{\beta}{((t-\gamma)^2+\delta)^n}$$

On conclut grâce aux cas simples

Exemple: Par division euclidienne

$$\frac{6t^3+45t^2+151t+190}{(t^2+5t+12)^2} = \frac{(6t+15)(t^2+5t+12)+4t+10}{(t^2+5t+12)^2} = 3\frac{2t+5}{t^2+5t+12} + 2\frac{2t+5}{(t^2+5t+12)^2}$$

D'où

$$\int_0^x \frac{6t^3+45t^2+151t+190}{(t^2+5t+12)^2}\,dt = 3\left(\ln(x^2+5x+12) - \ln(12)\right) + 2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{t^2+5t+12}\right)$$