Intégrales doubles

1 Théorèmes de Fubini

• **Intégration sur un rectangle**
Pour f continue sur $R := [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

• **Intégration sur un rectangle d'un "produit tensoriel"**
Pour $u : x \mapsto u(x)$ et $v : y \mapsto v(y)$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement, on a

$$\iint_R u(x)v(y)\,dxdy = \left(\int_a^b u(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d v(y)dy\right)$$

• **Intégration sur un domaine délimité par deux graphes**
⋆ Soit $\mathcal{A}$ le domaine défini par

$$\mathcal{A} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$

Alors

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, et vérifient $\varphi \leq \psi$ sur $[a, b]$

⋆ Soit $\mathcal{B}$ le domaine défini par

$$\mathcal{B} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ c \leq y \leq d \quad \text{et} \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}$$

Alors

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right) dy$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues sur $[c, d]$, et vérifient $\varphi \leq \psi$ sur $[c, d]$

2 Propriétés

• **l'intégrale est linéaire** :
Pour tout f, g continues sur $\mathcal{A}$ et λ, μ deux constantes

$$\iint_{\mathcal{A}} (\lambda \cdot f(x,y) + \mu \cdot g(x,y))\,dxdy = \lambda \cdot \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dxdy + \mu \cdot \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dxdy$$

• **Croissance de l'intégrale** :
Pour tout f, g continues sur $\mathcal{A}$

$$f \leq g \quad sur\ \mathcal{A} \Longrightarrow \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dxdy \leq \iint_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dxdy$$

• **Additivité par rapport au domaine d'intégration**.
Pour f continue sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, on a

$$\iint_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{A}_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathcal{A}_2} f(x,y)\,dxdy - \iint_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} f(x,y)\,dxdy$$

En particulier dans le cas où $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$

$$\iint_{\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{A}_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathcal{A}_2} f(x,y)\,dxdy$$

3 Changements de variables

On considère ici $\mathcal{A}$ un domaine borné d'aire connue.

• **Invariance par translation** Soit τ la translation de vecteur $h = (h_1, h_2)$, on a alors, pour tout f continue sur $\tau(\mathcal{A})$

$$\iint_{\tau(A)} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{A}} f(x+h_1, y+h_2)dxdy$$

• **Changement de variable affine**
On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & ax+by+c \\ v & = & a'x+b'y+c' \end{array}\right.$$

On calcule alors

$$\widetilde{f}(x,y) = f(u,v)$$

i.e. $\widetilde{f} = f \circ \Phi$ où Φ transforme (x,y) et (u,v) et $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

On passe alors de l'intégrale dans les anciennes coordonnées (x,y) relativement à $\mathcal{A}$ à l'intégrale dans les nouvelles coordonnées (u,v) relativement à $\mathcal{B}$ en dilatant d'un facteur $|ab'-a'b|$

$$\iint_{\mathcal{B}} f(u,v)dudv = \iint_{\mathcal{A}} \widetilde{f}(x,y)|ab'-a'b|dxdy$$

• **Passage en coordonnées polaires**.
On calcule

$$\mathcal{A}_{pol} := \{(r,\theta) \in U \ \mid \ M(r,\theta)_{pol} \in \mathcal{A}\}$$

où U est un domaine tel que $\mathcal{P} : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est injectif[1].
Par exemple $U = \mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi]$ ou $U = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right.$$

En posant alors pour f continue sur $\mathcal{A}$

$$\widetilde{f}(r,\theta) = f(x,y)$$

i.e. $\widetilde{f} = f \circ \mathcal{P}$ On a alors

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{A}_{pol}} \widetilde{f}(r,\theta)|r|drd\theta$$

[1]On peut tolérer qu'elle le soit sur U privé d'un ensemble d'aire nulle