Etude métrique des courbes planes

On considère $\mathcal{C} := (I, f)$ une courbe paramétrée de classe C^k (avec $2 \leq k \leq +\infty$ et I un **intervalle**) **régulière** et de support Γ.

1 Paramètrage d'origine

On note $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ le paramétrage d'origine de $\mathcal{C}$

- **Abscisse curviligne** :

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

- **Repère de Frenet** :

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{S'}\Big(x', y'\Big) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N} = \frac{1}{S'}\Big(-y', x'\Big)$$

- **Courbure** :

$$\tan\alpha = \frac{y'}{x'} \quad \longrightarrow \quad \alpha' = \dots \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha'}{S'}$$

ou

$$\text{Det}\Big(f', f''\Big) = \left(\frac{dS}{dt}\right)^3 \gamma$$

- **Rayon de Courbure** :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$$

2 Paramètrage normal

On note (J, φ) avec $\varphi = f \circ S^{-1}$ et $J = \varphi(I)$ le paramètrage normal. On pose

$$\varphi : s \mapsto (\mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s))$$

- **Repère de Frenet** :

$$\overrightarrow{T} = \Big(\frac{d\mathcal{X}}{ds}, \frac{d\mathcal{Y}}{ds}\Big) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N} = \Big(-\frac{d\mathcal{Y}}{ds}, \frac{d\mathcal{X}}{ds}\Big)$$

- **Relations de Frenet** :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

3 Paramètrage angulaire

le paramétrage angulaire (changement admissible lorsque $\mathcal{C}$ est birégulier) vérifie

$$\alpha \in C^{k-1} \qquad \text{et} \qquad \alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}}) \ [2\pi]$$

- **Repère de Frenet** :

$$\overrightarrow{T} = \Big(\cos\alpha, \sin\alpha\Big) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N} = \Big(-\sin\alpha, \cos\alpha\Big)$$

- **Relations de Frenet** :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha} = \overrightarrow{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overrightarrow{N}}{d\alpha} = -\overrightarrow{T}$$

- **Courbure** :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

4 Graphe d'une fonction ψ

On se ramène au premier cas, en posant

$$f : t \mapsto (t, \psi(t))$$

- **Abscisse curviligne** :

$$S' = \sqrt{1 + \psi'^2}$$

- **Rayon de Courbure** :

$$R = \frac{(1 + \psi'^2)^{3/2}}{\psi''}$$

5 Paramètrage polaire $\rho = \rho(\theta)$

On se ramène au premier cas, en posant

$$f : \theta \mapsto (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta))$$

- **Abscisse curviligne** :

$$S' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$$

- **Courbure** :

$$\alpha = \theta + V \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} V = \frac{\rho'}{\rho} \quad \longrightarrow \quad \alpha' = \dots \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha'}{S'}$$

- **Rayon de Courbure** :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$