Table des matières

Chapitre 1

Nombres Complexes

1.1 Le Corps $\mathbb{C}$ des complexes

1.1.1 Ecriture algébrique et correspondance Géométrique

1.1.1.1 La construction algébrique de $\mathbb{C}$ et correspondance géométrique

Il y a plusieurs façons équivalentes de voir les nombres complexes :
Une première façon consiste à les voir comme les points (ou vecteurs) du plan $\mathbb{R}^2$ euclidien. Ainsi le point $M \in \mathbb{R}^2$ (ou de façon équivalente le vecteur $\overrightarrow{OM}$) est repéré par ses coordonnées $(x; y)$ dans le repère (ou base) canonique.
Notons (a, b) les éléments de ce nouvel ensemble noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Par la suite tout point M (resp. tout vecteur $\overrightarrow{OM}$) de $\mathbb{R}^2$ sera dit d'affixe $z \in \mathbb{C}$ avec la correspondance ci-dessous*

$$M(a; b) \Longleftrightarrow z = (a, b) \qquad \Big(resp.\ \overrightarrow{OM}(a; b) \Longleftrightarrow z = (a, b)\Big)$$

On note $M(z)$ (resp. $\overrightarrow{OM}(z)$). ♠

On définit alors sur $\mathbb{C}$ deux lois de composition interne[1] :

La Loi additive $(x, y) + (x', y') = (x + x',\ y + y')$

La Loi multiplicative $(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy',\ xy' + x'y)$.

Muni de cette nouvelle structure algébrique $(\mathbb{C}, +, \times)$ vérifie les propriétés suivantes :

o) $\mathbb{C}$ est non vide : $(0, 0) \in \mathbb{C}$

i) la loi $+$ est associative : $\forall (u, v, w) \in \mathbb{C}^3;\quad u + (v + w) = (u + v) + w$

ii) la loi $+$ admet un élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C},\quad z + \mathbf{0} = \mathbf{0} + z = z$ avec $\mathbf{0} := (0, 0)$

iii) Tout élément de $\mathbb{C}$ admet un *symétrique* pour la loi $+$:
$(\forall a \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C};\ \ z + z' = z' + z = \mathbf{0})$. il suffit de prendre $z' = (-x, -y)$ lorsque $z = (x, y)$. On note $z' = -z$

iv) la loi $+$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2,\quad u + v = v + u$

v) la loi $\times$ est associative

vi) la loi $\times$ admet un élément neutre : il s'agit de $\mathbf{1} := (1, 0)$

vii) Tout élément <u>*non nul*</u> de $\mathbb{C}$ admet un *symétrique* pour la loi $\times$:
le symétrique de (x, y) est $(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ on le note aussi $\frac{1}{z}$

viii) la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$:
$\forall (u, v, w) \in \mathbb{C}^3,\quad u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)\quad$ et $\quad (v + w) \times u = (v \times u) + (w \times u)$

[1] un loi de composition interne combine deux éléments d'un ensemble pour obtenir un élément du même ensemble

ix) la loi $\times$ est commutative

Définition 1.1.2 *On résume les propriétés o) à iii) en disant que* $(\mathbb{C},+)$ *est un* ***groupe****.*
On résume les propriétés o) à iv) en disant que $(\mathbb{C},+)$ *est un* ***groupe abélien*** *(ou encore* ***commutatif****).*
On résume les propriétés o) à viii) en disant que $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un* ***corps*** *.*
On résume les propriétés o) à ix) en disant que $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un* ***corps commutatif****.*
♠

Exemple: $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et a fortiori $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien.
De même $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps commutatif et $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe abélien.
Mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est pas un corps et $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe.

Exemple: Si on note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des complexes privé de l'élément nul $\mathbf{0}$, on a que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe abélien. Il en va de même pour $(\mathbb{R}^*,\times)$

1.1.1.2 Identification de $\mathbb{R}$

A ne pas lire en première lecture :
Comme $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel[2], $\mathbb{C}$ lui aussi hérite de la même structure.
On peut donc définir un produit extérieur de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{C},\quad \lambda\cdot(x,\,y):=(\lambda x,\,\lambda y)=(\lambda,0)\times(x,\,y)$$

Il s'agit là de la multiplication classique d'un vecteur par un réel.

Remarque 1.1.1 *Puisque pour tout* $a,b,\lambda\in\mathbb{R}$ *on a*

$$(a,0)+_{\mathbb{C}}(b,0)=(a+_{\mathbb{R}}b,0)\qquad et\qquad \lambda\cdot_{\mathbb{C}}(a,0)=(\lambda\cdot_{\mathbb{R}}a,0)$$

en identifiant $\mathbb{R}$ *à* $\mathbb{R}\cdot\mathbf{1}=\{\lambda\cdot\mathbf{1};\quad\lambda\in\mathbb{R}\}$*, on peut affirmer que*

$\mathbb{R}$ *est un sous-espace vectoriel réel de* $\mathbb{C}$*.*

Ceci implique que lors des manipulations et considérations vectorielles (loi de composition externe, addition de deux vecteurs) on peut manipuler les les réels comme des complexes particuliers :

$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ *et compatibilité des lois vectorielles.* *

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $z\in\mathbb{C}$, $\lambda\cdot z=(\lambda\cdot\mathbf{1})\times z$.
On écrira donc la multiplication interne et externe de la même façon que dans $\mathbb{R}$.

On identifiera par la suite $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\cdot\mathbf{1}=\{\lambda\cdot\mathbf{1};\quad\lambda\in\mathbb{R}\}$.
En conséquence on a bien $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et l'on peut écrire sans ambiguïté $\lambda=\lambda\cdot\mathbf{1}$.

Comme le plan est une extension géométrique du plan, on dira que $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}$

Puisque

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (a,0)+_{\mathbb{C}}(b,0)=(a+_{\mathbb{R}}b,0)\qquad\text{et}\qquad (a,0)\times_{\mathbb{C}}(b,0)=(a\times_{\mathbb{R}}b,0)$$

On voit que l'ensembles des nombres complexes qui s'écrivent sous la forme $(a,0)$, avec a un réel, se comporte du point de vue ensembliste et algébrique de façon parfaitement équivalente à l'ensemble des réels.
En effet :
• du point de vu ensembliste on peut mettre en correspondance de façon bi-univoque les complexes de la forme $(a,0)$ avec les réels
(Ce qui en langage mathématique signifie que $\varphi:a\mapsto(a,0)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\{(a,0);\ a\in\mathbb{R}\}$)
• Du point de vu algébrique, les identités ci-dessus nous montrent que l'addition et la multiplication de réels ou de complexes de la forme $(a,0)$ est parfaitement compatible.
(En langage mathématique on dit que φ est un morphisme de corps.)

Les structures de corps de $(\mathbb{R},+_{\mathbb{R}},\times_{\mathbb{R}})$ et de cette partie de $(\mathbb{C},+_{\mathbb{C}},\times_{\mathbb{C}})$ sont alors compatibles moyennant l'identification

$$Pour\ tout\ a\ réel\qquad (a,0)\quad s'identifie\ à\quad a$$

On peut donc écrire sans ambiguïté $a+b$ ou $a\times b$ sans préciser l'origine complexe ou réelle des lois.

Ceci implique que lors des manipulations et considérations algébriques (lois + et $\times$) on peut manipuler les les réels comme des complexes particuliers : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et compatibilité des lois algébriques.

On dit que $\mathbb{R}$ est un sous-corps. Mais remarquons que contrairement à $\mathbb{R}$, nous n'avons pas de relation d'ordre induite sur $\mathbb{C}$.

[2]Notion qui sera précisée au Chapitre Espaces Vectoriels

1.1.1.3 L'Ecriture algébrique

Notons $\mathbf{i}$ le complexe $(0,1)$. Et remarquons que $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$.

Proposition 1.1.1 *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique :*

$$z = a + b\mathbf{i} \quad \textit{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Cette écriture est l'écriture cartésienne de $z := (a,b)$.
*a est la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**, on note :*

$$a = \Re(z) \qquad et \qquad b = \Im(z)$$

♣

Preuve
Existence : Soit $z = (a,b)$ (voir note ci-dessous[3])

$$z = (a,b) \Leftrightarrow z = (a,0) + (0,b) \Leftrightarrow z = (a,0) + (b,0) \times (0,1) \Leftrightarrow (a,0) + (b,0) \times \mathbf{i} \Leftrightarrow z = a + b\mathbf{i}$$

Unicité : Supposons par l'absurde qu'un même nombre complexe admet deux écriture algébriques distinctes $a + bi$ et $a' + b'i$ le vecteur représentant ce complexes a pour coordonnées $(a;b)$ mais aussi $(a';b')$ et donc $a = a'$ et $b = b'$... absurde •

Remarque: Tout complexe s'écrit de façon unique comme la somme d'un réel et d'un imaginaire pur (nombre de la forme $\mathbf{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}$). On note $i\mathbb{R}$ l'ensembles des imaginaires purs (attention 0 est à la fois imaginaire pur et réel).
l'unicité de cette décomposition se traduit par

$$\forall (x,x',y,y') \in \mathbb{R}^4, \quad [x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow (x = x' \quad \text{et} \quad y = y')]$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout z_1, z_2 complexes et λ réel, on a :*

$$Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1) \qquad Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$

$$Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1) \qquad Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$$

On dit que Re et Im sont deux applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$. ♣

Démonstration Posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ (avec a_1, a_2, b_1, b_2 réels). On a

$$\begin{array}{rcll} z_1 + z_2 & = & (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) & \\ & = & a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 & \text{associativité} \\ & = & a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 & \text{commutativité} \\ & = & a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) & \text{distributivité} \\ & = & (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) & \text{associativité} \end{array}$$

Or $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, d'où $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ et $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$

De même

$$\begin{array}{rcll} \lambda z_1 & = & \lambda(a_1 + ib_1) & \\ & = & \lambda a_1 + \lambda i b_1 & \text{distributivité} \\ & = & \lambda a_1 + i\lambda b_1 & \text{commutativité} \end{array}$$

Or $\lambda a_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda b_1 \in \mathbb{R}$, d'où $Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1)$ et $Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1)$ •

[3] Convention : $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ signifie $(A \Leftrightarrow B) \quad \text{et} \quad (B \Leftrightarrow C)$

1.1.1.4 Complexe conjugué et Module

Définition 1.1.3 *Soit $M \in \mathbb{R}^2$ un point d'affixe $z = a + b\mathbf{i}$. Alors le point M', symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, a pour affixe $\bar{z} = a - b\mathbf{i}$. $\bar{z}$ s'appelle le complexe conjugué de z* ♠

On a alors de façon immédiate :

Proposition 1.1.3 *Soient z, z_1 et z_2 trois complexes quelconques :*

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}$$

*la conjugaison est un **morphisme de corps involutif** :*

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad et \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

En particulier pour $z_2 \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

♣

Démonstration Posons $z = a + ib$, $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ (avec a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 réels). On a

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = a + ib + a - ib = a + a + ib - ib = 2a + 0 = 2a$$

On a appliqué successivement l'associativité, la commutativité et la définition du symétrique par rapport à la loi $+$.
Par un calcul similaire on trouve

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = a + ib - a + ib = a - a + ib + ib = 0 + 2ib = 2ib$$

D'où les deux premières égalités.

$\bar{z} = a - ib = a + i \times (-b)$ d'où $\bar{\bar{z}} = a - i \times (-b) = a + ib = z$.
D'où le caractère involutif de la conjugaison.

$$\begin{array}{rcll}
\overline{z_1 + z_2} & = & \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} & \text{(voir calcul de la preuve précédente)} \\
& = & (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) & \\
& = & a_1 + a_2 - ib_1 - ib_2 & \text{associativité et distributivité} \\
& = & a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 & \text{commutativité} \\
& = & (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) & \text{associativité} \\
& = & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 &
\end{array}$$

D'où le caractère additif de la conjugaison

$$\begin{array}{rcll}
\overline{z_1 z_2} & = & \overline{(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2)} & \\
& = & \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} & \text{Définition de la loi } \times \\
& = & (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) & \\
& = & (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - a_2 b_1) & \text{distributivité} \\
& = & [a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)] + i[a_1(-b_2) + a_2(-b_1)] & \\
& = & (a_1 - ib_1) \times (a_2 - ib_2) & \text{Définition de la loi } \times \\
& = & \overline{(a_1 + ib_1)} \times \overline{(a_2 + ib_2)} & \\
& = & \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 &
\end{array}$$

D'où le caractère multiplicatif de la conjugaison.

En corollaire immédiat à ce résultat on obtient lorsque $z_2 \neq 0$

$$\begin{array}{rcll}
1 & = \overline{1} & & \\
& = & \overline{z_2 \times \frac{1}{z_2}} & \text{Définition de l'inverse} \\
& = & \overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} & \text{la conjugaison est multiplicative}
\end{array}$$

D'où par définition de l'inverse

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}$$

Multiplions cette dernière égalité par $\overline{z_1}$, on obtient

$$(*) \qquad \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}}$$

Appliquons le caractère multiplicatif au premier membre de l'égalité $(*)$:

$$\overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \times \left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

D'où $(*)$ devient

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

•

Remarque: On a de façon immédiate, pour tout complexe z

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = Re(z) \Longleftrightarrow Im(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \bar{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = iIm(z) \Longleftrightarrow Re(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\bar{z}$$

Remarque: Pour tout $z = a + ib$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est une quantité réelle positive.

on a alors la définition suivante :

Définition 1.1.4 *A tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on associe un nombre réel positif noté $|z|$ qu'on appelle module de z et qui vaut :*

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$

♠

Comme on le verra plus tard c'est une distance, $|z|$ est la distance euclidienne du point $M(z)$ au point O.

Remarque: lorsque $z \in \mathbb{R}$, le module de z coïncide avec la valeur absolue de z. D'où la notation.

Proposition 1.1.4 *Pour $z = a + ib$ avec a, b réels et z_1, z_2 deux complexes quelconques, on a :*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad et \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\textbf{Si } z \neq 0)$$

$$|-z| = |\bar{z}| = |z|$$

$$Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z| \qquad et \qquad Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad et \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\textbf{Si } z_2 \neq 0)$$

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$$

♣

Démonstration les deux premières égalités sont triviales.

$$|\bar{z}|^2 = \bar{z}\bar{\bar{z}} = \bar{z}z = z\bar{z} = |z|^2 \qquad \text{et} \qquad |-z|^2 = (-z) \times \overline{(-z)} = (-z) \times (-\overline{z}) = z\bar{z} = |z|^2$$

or la fonction carrée est injective sur $\mathbb{R}_+$ et $|\bar{z}|, |-z|$ et $|z|$ sont des réels positifs. D'où $|-z| = |\bar{z}| = |z|$

Puisqu'un réel est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue on a $Re(z) \leq |Re(z)|$.
Puisque $b^2 \geq 0$ on en déduit $a^2 + b^2 \geq a^2$. D'où en invoquant la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} \qquad \text{or } \sqrt{a^2} = |a|$$

D'où $|Re(z)| \leq |z|$.
Les inégalités portant sur la partie imaginaire se démontrent de façon analogue.

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \times \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$$

D'où le caractère multiplicatif du module.

Du caractère multiplicatif du module et en partant de l'égalité $|1| = 1$ on en déduit comme pour la conjugaison que $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Enfin

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow |z|^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

Or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul (voir Lemme ci-dessous). d'où

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow (a^2 = 0 \quad \text{et} \quad b^2 = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0) \Longleftrightarrow z = 0$$

•

Dans la démonstration ci-dessus on s'est servi du lemme suivant

Lemme 1.1.5 *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels positifs ou nuls ($\forall i \in I,\ x_i \geq 0$).*

$$\sum_{i \in I} x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in I, x_i = 0$$

♣

Preuve Il suffit prouver sa contraposée :

$$(\exists i \in I;\ x_i > 0) \Longrightarrow \sum_{i \in I} x_i > 0$$

Supposons donc avoir un indice $i_0 \in I$ pour lequel $x_{i_0} > 0$.
En ajoutant de part et d'autre de cette inégalité la quantité $\sum_{i \neq i_0} x_i$ on obtient

$$\sum_{i \in I} x_i > \sum_{i \neq i_0} x_i$$

Or par hypothèse on a $\sum_{i \neq i_0} x_i \geq 0$ (car somme de quantités positives ou nulles).
Donc $\sum_{i \in I} x_i$ étant strictement supérieur à une quantité positive ou nulle on a bien

$$\sum_{i \in I} x_i > 0$$

•

Exercice: On note $\mathbb{U} \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe abélien.
indication : Vérifier que la loi multiplicative est bien une loi de composition *interne* pour $\mathbb{U}$:

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2,\ z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$$

Exercice: Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque

$$|Re(z)| = |z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$Re(z) = |z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$$

Théorème 1.1.6 (inégalité Triangulaire) *Soient z_1, z_2 deux complexes quelconques*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

avec égalité si et seulement si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+;\ (z_1 = \alpha z_2 \ \ ou \ \ z_2 = \alpha z_1)$$

♣

Démonstration

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

Or $z_2\overline{z_1} = \overline{\overline{z_2}z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}}$. D'où

$$(*) \qquad |z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+2Re(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2 \leq |z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2 = |z_1|^2+2|z_1|\times|z_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

car $Re(z_1\overline{z_2}) \leq z_1\overline{z_2}$.
On en déduit donc l'inégalité triangulaire, grâce à la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

En cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, les expressions aux deux extrémités de $(*)$ deviennent égales ainsi que toutes les expressions intermédiaires en particulier :

$$Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$$

Ce qui équivaut à $z_1\overline{z_2} = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+$.
1er Cas : $z_2 = 0$, alors on a bien $z_2 = \alpha z_1$ en prenant $\alpha = 0$
2ème Cas : $z_2 \neq 0$, alors on a bien $z_1 = \alpha z_2$ en prenant $\alpha = \frac{\beta}{|z_2|^2}$
Dans tous les cas on a trouvé un réel positif α tel que :

$$z_1 = \alpha z_2 \ \text{ ou } \ z_2 = \alpha z_1$$

•

Remarque 1.1.2
Lorsque $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+;\ (z_1 = \alpha z_2 \ \ ou \ \ z_2 = \alpha z_1)$, on dit que les complexes z_1 et z_2 sont ***positivement liés*** $*$

Corollaire 1.1.7 (Deuxième inégalité triangulaire) *Soient z_1, z_2 deux complexes quelconques*

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$$

♣

Preuve Soient z_1 et z_2 deux complexes quelconques.
Appliquons la "première" inégalité triangulaire au couple de complexes $(z_1 - z_2, z_2)$:

$$|(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{D'où} \qquad |z_1| - |z_2| \leq |z_2 - z_1|$$

ceci prouve que :

$$(*) \qquad \forall (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |\omega_1| - |\omega_2| \leq |\omega_1 - \omega_2|$$

Appliquons cette dernière inégalité au couple (z_2, z_1), on trouve :

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$$

Or $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$, d'où

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

•

Remarque 1.1.3 *Dans la pratique on utilise l'une des deux inégalités (la plus pertinente) :*

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| \qquad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Et on retient de façon synthétique que :

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

*

Remarque: On peut généraliser ceci à toute famille finie de complexes $(z_i)_{i\in I}$:

$$\left|\sum_{i\in I} z_i\right| \leq \sum_{i\in I} |z_i|$$

1.1.2 Exponentielle Complexe et Ecriture Trigonométrique

1.1.2.1 A propos de l'exponentielle complexe

On considère connues les propriétés des fonctions trigonométriques enseignées au Lycée. Posons :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} \overset{def}{=} \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition 1.1.8 *Quels que soient les réels θ et ϕ on a :*

$$|e^{\mathbf{i}\theta}| = 1 \qquad e^{\mathbf{i}(\theta+\phi)} = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\phi} \qquad \left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{i}\theta} = \overline{e^{\mathbf{i}\theta}}$$

♣

Démonstration Soient θ et ϕ deux réels quelconques

$$|e^{\mathbf{i}\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$$

$$e^{\mathbf{i}(\theta+\phi)} = cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = [\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)] + i[\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)]$$

D'où par définition de la multiplication :

$$e^{\mathbf{i}(\theta+\phi)} = [cos(\theta) + i\sin(\theta)] \times [cos(\phi) + i\sin(\phi)] = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\phi}$$

En appliquant ce qui précède à $\phi = -\theta$ on trouve

$$e^{\mathbf{i}\theta}e^{-\mathbf{i}\theta} = e^{\mathbf{i}(\theta-\theta)} = e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

D'où $\left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{i}\theta}$
Enfin puisque l'inverse d'un complexe s'écrit comme le quotient de son conjugué et de son module au carré, on a d'après tout ce qui précède :

$$\left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^{-1} = \frac{\overline{e^{\mathbf{i}\theta}}}{|e^{\mathbf{i}\theta}|^2} = \overline{e^{\mathbf{i}\theta}}$$

•

Remarque: On déduit des identités précédentes que quels que soient les réels θ et ϕ on a :

$$e^{\mathbf{i}(\theta-\phi)} = \frac{e^{\mathbf{i}\theta}}{e^{\mathbf{i}\phi}}$$

Corollaire 1.1.9 *soit θ un réel et n un entier naturel quelconques :*
Formule d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$$

Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \big(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

♣

Preuve Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Posons $z = e^{i\theta}$,on a alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ d'où

$$\cos(\theta) = Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2}$$

Démonstration analogue pour $\sin(\theta)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.
La formule de Moivre est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : "(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}"$

- Comme $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0} = e^{i0\times\theta}$, on a $\mathcal{P}(0)$ vraie
- Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, c'est à dire $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$, on en déduit :

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k \times e^{i\theta} = e^{ik\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(k\theta+\theta)} = e^{i(k+1)\theta}$$

On a donc Montré que

$$\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$$

$\star$ Conclusion : On a donc montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad CQFD$$

•

1.1.2.2 Ecriture Trigonométrique

Comme tout point de $\mathbb{R}^2$ peut être repéré par ses coordonnées polaires : distance à l'origine et angle avec l'axe des x, on notera de facon équivalente les nombres complexes :

Définition 1.1.5 (Ecriture Trigonométrique)
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un réel $r > 0$ et un réel $\theta \in \mathbb{R}$ (pas forcément unique) tel que :

$$z = r\left(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)\right) = re^{i\theta}$$

Cette écriture porte le nom d'écriture trigonométrique de z ♠

Preuve Soit $\overrightarrow{OM}(z)$ avec $z \neq 0$.
Comme $z \neq 0$, $\overrightarrow{OM}$ est distinct de $\overrightarrow{0}$. Posons $r = \|\overrightarrow{OM}\| > 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{ON} := \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$ est de norme 1, le point N est donc sur le cercle trigonmétrique et ses coordonnées s'écrivent : $N(\cos\theta; \sin\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$ s'écrivent alors $(r\cos\theta; r\sin\theta)$, d'où :

$$z = r\left(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)\right)$$

•

Proposition 1.1.10 *En reprenant les notations de la définition on a :*
Le réel r n'est autre que le module de z.
Le réel θ est ce qu'on appelle **un** *argument de z et on note $arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$*
En eefet deux arguments différent de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ En revanche il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, on l'appelle l'argument principal. On le note $Arg(z)$. ♣

Preuve soit $z = re^{i\theta}$ avec les notations de la définition précédente.

$$|z| = |re^{i\theta}| = |r| \times |e^{i\theta}| = r \times 1 = r$$

Donc dans l'écriture trigonométrique le premier facteur (appelé le module) est unique. Reste à déterminer les arguments possibles :

$$e^{i\theta} = e^{i\phi} \Leftrightarrow \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta) = \cos(\phi) + \mathbf{i}\sin(\phi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \cos(\phi) \\ \sin(\theta) & = & \sin(\phi) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ \theta = \phi + 2k\pi$$

La dernière assertion (en fin d'équivalence) se note aussi $\theta \equiv \phi\ \ [2\pi]$.
On en déduit qu'il n'existe qu'une seule solution dans l'intervalle de longueur 2π : $]-\pi, \pi]$ •

Au vu de ce que l'on vient de voir on retiendra :

Proposition 1.1.11 *Soient* $(r_1, r_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *et* $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$*, on a alors*

$$r_1 e^{\mathbf{i}\theta_1} = r_2 e^{\mathbf{i}\theta_2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_1 & = & r_2 \\ \theta_1 & = & \theta_2 + 2k\pi \quad avec \;\; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

♣

Proposition 1.1.12 *Soient* z_1 *et* z_2 *deux complexes non nuls quelconques*

$$arg(z_1 z_2) \equiv arg(z_1) + arg(z_2) \;\; [2\pi]$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv arg(z_1) - arg(z_2) \;\; [2\pi]$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $arg(z_1^n) \equiv n \cdot arg(z_1) \;\; [2\pi]$

$$arg(\overline{z_1}) \equiv -arg(z_1) \;\; [2\pi]$$

♣

Preuve Avec les notations ci-dessus, soient $z_1 = r_1 e^{\mathbf{i}\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{\mathbf{i}\theta_2}$ les écritures trigonométriques de z_1 et z_2.
les quatre égalités annoncées découlent des identités suivantes :

$$r_1 e^{\mathbf{i}\theta_1} r_2 e^{\mathbf{i}\theta_2} = (r_1 r_2) e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 > 0$$

$$\frac{r_1 e^{\mathbf{i}\theta_1}}{r_2 e^{\mathbf{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathbf{i}(\theta_1-\theta_2)} \quad \text{et} \quad \frac{r_1}{r_2} > 0$$

$$(r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n e^{in\theta_1} \quad \text{et} \quad r_1^n > 0$$

$$\overline{r_1 e^{i\theta_1}} = r_1 e^{-i\theta_1} \quad \text{et} \quad r_1 > 0$$

•

1.1.2.3 Retour à l'exponentielle

Comme l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ "transforme la somme de réels en produit de complexes" on dit qu'il s'agit d'un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$. Comme cette application est à valeurs dans $\mathbb{U}$ et que tout élément de $\mathbb{U}$ s'écrit comme l'image d'un réel par cette application, on peut préciser qu'il s'agit d'un ***morphisme de groupes surjectif*** entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$

Définition 1.1.6 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, dont l'écriture cartésienne est* $z = a + ib$*, on pose*

$$e^z \stackrel{def}{=} e^a e^{ib}$$

l'applicationz $\mapsto e^z$ *(à valeurs complexes et définie sur* $\mathbb{C}$*) s'appelle l'exponentielle complexe* ♠

Proposition 1.1.13
l'exponentielle complexe est un morphisme de groupes surjectif entre $(\mathbb{C}, +)$ *et* $(\mathbb{C}^*, \times)$ ♣

Preuve Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ les écritures algébriques de deux complexes quelconques. En invoquant principalement la caractéristique de l'exponentiel réel, la définition de l'exponentiel complexe et la commutativité du produit, on trouve :

$$e^{z_1+z_2} = e^{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} = e^{a_1+a_2} e^{i(b_1+b_2)} = e^{a_1} e^{a_2} e^{ib_1} e^{ib_2} = e^{a_1} e^{ib_1} e^{a_2} e^{ib_2} = e^{a_1+ib_1} e^{a_2+ib_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Par ailleurs l'exponentiel d'un réel et l'exponentiel d'un complexe sont tout deux non nuls. donc l'exponentiel complexe est à valeurs non nulles. On a donc prouvé que l'exponentiel complexe est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$

Pour montrer le caractère surjectif il suffit d'utiliser l'écriture trigonométrique des complexes.
On veut montrer que *Tout complexe non nul* z *est l'image d'un complexe* ω *par l'exponentiel complexe*
En effet : Si $z = re^{i\theta}$ est l'écriture complexe de z, on voit que $\omega = \ln(r) + i\theta$ convient. •

L'exponentiel complexe n'est pas injectif : car il existe eux complexes distincts (par exemple 0 et 2π) qui s'envoient par l'exponentiel complexe sur la même image (ici 1). En fait on a

Proposition 1.1.14 *Pour tout z_1 et z_2 complexes*

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Longleftrightarrow \Big(Re(z_1) = Re(z_2) \quad et \quad Im(z_1) \equiv Im(z_2) \ \ [2\pi] \Big)$$

♣

Exercice: le prouver

Remarque: De façon plus générale pour tout z complexe et ω complexe non nul on peut résoudre l'équation

$$(*) \qquad e^z = \omega$$

En passant par l'écriture algébrique de $z = a + ib$ et par l'écriture trigonométrique de $\omega = \rho e^{i\theta}$.
Résoudre $(*)$ revient alors à résoudre

$$e^a e^{ib} = \rho e^{i\theta}$$

D'où les solutions sont les nombres complexes $z = a + ib$ avec

$$a = \ln(\rho) \qquad \text{et} \qquad b \equiv \theta \ \ [2\pi]$$

1.2 Equations à coefficients complexes

1.2.1 Racines n-ièmes

1.2.1.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $\alpha + \mathbf{i}\beta$ un nombre complexe, on cherche à résoudre :

$$(*) \qquad z^2 = \alpha + \mathbf{i}\beta$$

Pour cela écrivons z sous forme cartésienne $z = a + \mathbf{i}b$, on a alors

$$(*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a+\mathbf{i}b)^2 & = & \alpha + \mathbf{i}\beta \\ |(a+\mathbf{i}b)|^2 & = & |\alpha + \mathbf{i}\beta| \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + 2\mathbf{i}ab & = & \alpha + \mathbf{i}\beta \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{array} \right.$$

D'où en identifiant partie réelle et partie imaginaire de la première équation, il vient

$$(*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha \\ 2b^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right.$$

finalement puisque $|\alpha| \leq \sqrt{\alpha^2 + b^2}$, les deux seconds membres des deux premières équations sont des quantités positives, on a :

$$(*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \pm\sqrt{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)/2} \\ b & = & \pm\sqrt{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)/2} \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right.$$

On trouve donc par les deux premières égalités quatre couples (a, b) possibles or l'équation initiale étant de degré 2, elle n'admet tout au plus que 2 solutions. Les couples qui ne sont pas solution sont en fait éliminés par le fait que $2ab = \beta$, ainsi on sait si a et b sont de même signe, ou de signes opposés.

1.2.1.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Cette fois-ci l'on cherche à résoudre :

$$(**) \qquad z^n = \rho e^{\mathbf{i}\phi}$$

où $\rho > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ sont donnés.
Comme $z = 0$ n'est pas solution, nous pouvons écrire z sous forme trigonométrique $z = re^{\mathbf{i}\theta}$, on a :

$$(**) \Longleftrightarrow r^n e^{\mathbf{i}n\theta} = \rho e^{\mathbf{i}\phi} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r^n & = & \rho \\ n\theta & = & \phi + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

D'où finalement les solutions de $(**)$ sont les

$$Z_k = \rho^{1/n} e^{\mathbf{i}(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Il ne faut surtout pas croire que l'on a trouvé une infinité de solutions à une équation polynômiale de degré n, puisqu'en fait $Z_{k+n} = Z_k$. Ainsi on peut réduire l'ensemble des k à l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$

Exercice: Montrer que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p-périodique :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad u_{m+p} = u_m$$

admet un nombre fini de valeurs au plus égal à p que l'on peut choisir parmi $u_0, \ldots, u_{p-1}$
indication : on pourra utiliser la division euclidienne de n par p

1.2.1.3 Racines n-ièmes de l'unité

Dans le cas particulier où l'on cherche les solutions de

$$z^n = 1$$

Si on note les solutions $\omega_k = e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), l'ensemble des solutions est noté :

$$\mathbb{U}_n \stackrel{def}{=} \{\omega_k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$$

Proposition 1.2.1
$(\mathbb{U}_n, \times)$ *est un groupe fini (cyclique) et plus particulièrement, en reprenant les notations ci-dessus :*

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, \quad \omega_k \omega_l = \omega_{k+l}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_k^{-1} = \omega_{-k}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_k = \omega_1^k$$

♣

Exercice: le prouver
Exercice: Montrer que pour $n \geq 3$, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés.
indication Montrer que les triangles formés par deux sommets consécutifs et O sont isométriques

Proposition 1.2.2 *Soit $n \geq 2$ un enter naturel, alors :*

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

♣

Preuve Reprenons les notations du début de paragraphe.
On a d'après la formule de la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $\omega_1 \neq 1$

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n} (\omega_1)^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1}$$

D'où la conclusion, puisque par construction $1 - \omega_1^n = 0$ •

1.2.2 Polynômes

1.2.2.1 Le Théorème fondamental de l'algèbre

Nous énonçons ici (sans le démontrer) un théorème fondamental en Analyse comme en Algèbre :

Théorème 1.2.3 (d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme à coefficients complexes, de degré $n \geq 1$, admet au moins une racine complexe. ♣

En particulier puisque[4] :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad [P(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ P(X) = (X - x_0)Q(X)]$$

Où $\mathbb{C}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes dont le degré est au plus n, on démontre, par récurrence, le résultat suivant :

Proposition 1.2.4 *Tout polynôme P de degré $n \geq 1$, se factorise en produit de monômes :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

en particulier, P admet exactement n racines, comptées avec multiplicité : $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ♣

1.2.2.2 Polynômes du second degré

Ce théorème est un théorème d'existence car il nous dit que les racines existent, mais ne nous donne aucune information sur la façon de les trouver. En fait, il est prouvé depuis les travaux d'E. Galois que les racines des polynômes de degré au moins 5 ne peuvent pas, en général, être obtenues par calcul algébrique direct sur les coefficients (additions, multiplications ou extractions de racines). En revanche dès que le degré du polynôme est au plus 4, on connaît des méthodes générales de résolutions :
Nous allons étudier le cas des polynômes de degré 2 :

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) à coefficients complexes.
Notons x_+ et x_- ses deux racines complexes (pas forcément distinctes), qui existent grâce au théorème de d'Alembert : on a immédiatement

$$P(X) = a(X - x_+)(X - x_-) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_+ + x_- & = & -b/a \\ x_+ \cdot x_- & = & c/a \end{array} \right.$$

Exercice: le prouver

Exemple: Ainsi dès que l'on connait une raciine évidente, la deuxième l'est aussi.
Dans $2X^2 - 8X + 6$ $x_+ = 1$ est une racine évidente l'autre x_- vérifie

$$x_- + 1 = 4 \qquad \text{et} \qquad 1 \times x_- = 3$$

D'où on en dédeuit de l'une quelconque de ces équations $x_- = 3$

Remarque: Cette équivalence est très utile pour la résolution de systèmes du type

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a + b & = & S \\ ab & = & P \end{array} \right.$$

d'inconnues a et b et où S, P sont des constantes complexes fixées.

En effet les solutions de ce système sont exactement les racines du polynôme

$$X^2 - SX + P$$

Ainsi la recherche de racines revient à la résolution d'un système faisant intervenir leur somme et leur produit. Cette Méthode est très utile lorsque l'une des racines est connue (on parle de racine évidente) mais dans le le cas général elle est moins efficace.

[4] on démontrera plus loin ce résultat

Une façon systématique pour trouver les racines est la suivante :

$$P(X) = a(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}) = a(X^2 + 2\frac{b}{2a}X + \frac{c}{a}) = a[(X + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

avec

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ est le discriminant associé à P. C'est un nombre complexe, qui comme tout nombre complexe admet deux (pas forcément distinctes) racines carrées complexes δ et $-\delta$, D'où :

$$P(X) = a[(X + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2] = a(X - x_+)(X - x_-)$$

avec

$$x_\pm = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Remarque: Lorsque le polynôme s'écrit :

$$P(x) = aX^2 + 2b'X + c$$

avec un b' pertinent (par exemple un entier), alors les calculs deviennent plus simple.
On note $\Delta' = b'^2 - ac$ le discriminant réduit. Et si δ' désigne une racine carrée de ce Δ', alors les racines de P sont :

$$x_\pm = \frac{-b' \pm \delta'}{a}$$

1.3 Le Point de vue Géométrique : Le Retour

1.3.1 Quelques identités

Nous avons vu que tout nombre complexe z admet une représentation géométrique $M(z)$. Essayons de traduire quelques propriétés géométriques dans un langage algébrique :

Proposition 1.3.1 *Notons $A(Z_A), B(Z_B), C(Z_C)$ et $D(Z_D)$ quatre points du plan et leurs affixes.*
- ***Vecteurs*** $\overrightarrow{AB}(Z_B - Z_A)$.
- ***Mesure d'angle orienté :*** *(avec $A \neq B$ et $C \neq D$)*

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv arg(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A})\ [2\pi]$$

- ***Norme d'un vecteur*** *ou* ***distance entre deux points***

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$$

♣

Démonstration Puisque par Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ on a la première identité.

Supposons $A \neq B$ et $C \neq D$. les complexes $Z_D - Z_C$ et $Z_B - Z_A$ étant non nuls, ils admettent une écriture trigonométrique :

$$Z_B - Z_A = r_{AB}e^{i\theta_{AB}} \quad \text{et} \quad Z_D - Z_C = r_{CD}e^{i\theta_{CD}}$$

Par construction (et d'après ce qui précède) θ_{AB} (resp. θ_{CD}) correspond à l'angle orienté

$$(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \theta_{AB}\ [2\pi] \qquad (resp.\ (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \theta_{CD}\ [2\pi])$$

D'après les relations de Chasles et les propriétés des arguments, on en déduit :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}}) - (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}}) \equiv arg(Z_D - Z_C) - arg(Z_B - Z_A) \equiv arg(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}) \qquad [2\pi]$$

Enfin si on note $Z_B - Z_A = x + iy$ l'écriture algébrique de $Z_B - Z_A$, on a d'après ce qui précède $\overrightarrow{AB}(x; y)$ et donc

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z_B - Z_A|$$

•

Remarque 1.3.1 (Inégalité triangulaire)
Etant donnée l'interprétation géométrique du module, l'inégalité triangulaire est équivalente au fait que pour trois points quelconques su plan on a

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \qquad (resp.\ \ \|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|)$$

Ce qui naïvement traduit le fait que le chemin le plus court entre deux points est le segment les reliant. Le cas d'égalité dans l'ingalité triangulaire : $AC = AB + BC$ arrivant si et seulement si A, B, C sont alignés dans cet ordre ∗

Définition 1.3.1 *Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$ quelconques On appelle disque ouvert (resp. fermé) de centre ω et de rayon r l'ensemble*

$$D(\omega, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C};\quad |z - \omega| < r\} \qquad (resp.\ \ \overline{D}(\omega, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C};\quad |z - \omega| \leq r\})$$

♠

1.3.2 Quelques transformations

Proposition 1.3.2 *Etant donné les identité précédentes on a*

- $z \mapsto \bar{z}$ *correspond à une symétrie par rapport à l'axe des x.*
- $z \mapsto z + a$ *correspond à une translation (de vecteur $\overrightarrow{OA}(a)$).*
- $z \mapsto e^{\mathbf{i}\theta} z$ *correspond à une rotation d'angle θ et de centre O.*
- $z \mapsto kz$ *$(k > 0)$correspond à une homothétie de centre O et de rapport k.* ♣

Exercice: le prouver

Exercice: Soit $Z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ un complexe non nul (et son écriture trigonmétrique).
Quelle transformation envoie $\mathbb{U}_n$ sur l'ensemble des racines n-ièmes de Z_0 ?
Que peut-on en conclure sur les points dont les affixes sont les racines n-ièmes d'un complexe.
indication : On montrera que l'ensemble de ces racines est $\{r_0 e^{i\frac{\theta_0}{n}} \omega;\ \omega \in \mathbb{U}_n\}$

Proposition 1.3.3
Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois points du plan. Soient θ et k deux réels avec $k > 0$ On note $H_{\Omega,K}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k. et $R_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et de d'angle θ.

$$M' = R_{\Omega,\theta}(M) \Longleftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$M' = H_{\Omega,k}(M) \Longleftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

Par ailleurs puisqu'ils sont de même centre, $R_{\Omega,\theta}$ et $H_{\Omega,K}$ commutent

$$R_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,K} = H_{\Omega,K} \circ R_{\Omega,\theta}$$

♣

Démonstration Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan. avec les notations de la proposition on a

$$M' = H_{\Omega,k}(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Longleftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

De même

$$M' = R_{\Omega,\theta}(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ \ [2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = -z - \omega| \\ arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ \ [2\pi] \end{cases}$$

Soit d'après les propriétés des arguments

$$M' = R_{\Omega,\theta}(M) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |z'-\omega| = -z-\omega| \\ arg(z'-\omega) - arg(z-\omega) \equiv \theta \ \ [2\pi] \end{array} \right. \Longleftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$

Commutativité
On note respectivement $M(z), M'(z')$ et $M''(z'')$ un point, son image par $R_{\Omega,\theta}$ et l'image de ce dernier par $H_{\Omega,k}$. leurs affixes sont telles que

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega) \quad \text{et} \quad z'' - \omega = k(z'-\omega)$$

D'où

$$z'' - \omega = k[e^{i\theta}(z'-\omega)] = ke^{i\theta}(z'-\omega)$$

Donc la transformation $H_{\Omega,k} \circ R_{\Omega,\theta}$ envoie $M(z)$ sur le point d'affixe $ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.

Si on note $P(Z_P)$ l'image de M par $H_{\Omega,k}$ et $Q(Z_Q)$ l'image de ce dernier par $R_{\Omega,\theta}$, on a alors

$$Z_P - z = k(z-\omega) \quad \text{et} \quad Z_Q - \omega = e^{i\theta}(Z_P - \omega)$$

D'où par un calcul analogue, la transformation $R_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,k}$ envoie $M(z)$ sur le point d'affixe $ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.

Conclusion : ces deux transformations envoyant tout point du plan sur des images identiques, on en déduit qu'elles sont égales... D'où la commutativité.

•

Définition 1.3.2 *Les rotations, les homothéties, les translations ainsi que leurs composées forment l'ensemble des similitudes directes du plan* ♠

Remarque 1.3.2 *l'application $R_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,K}$ est la similitude directe de centre Ω rapport k de d'angle θ* ∗

Proposition 1.3.4 *A toute similitude directe du plan S correspond (à l'aide de l'identification entre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$) une et une seule application*

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \qquad (avec \ \ (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$$

Réciproquement à toute application du type $(*)$ correspond une et une seule similitude directe. ♣

Démonstration Le cas $a = 1$ correspond aux translations, on ne s'interessera donc qu'au cas $a \neq 1$.
Reprenons les notations des propositions ci-dessus :
Puisque $ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega = ke^{i\theta}z + \omega(1-ke^{i\theta})$ On a prouvé au passage que cette transformation avec pour application correspondante

$$z \mapsto az+b \qquad avec \ \ a = ke^{i\theta} \in \mathbb{C}^*, \ b = \omega(1-ke^{i\theta}) \in \mathbb{C}$$

En laisse en exercice les autres cas (composées de centre distinct, translations et leurs composées)
Réciproquement si S est une transformation du plan qui envoi un point d'affixe z en un point d'affixe $az+b$ avec$(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $a \neq 1$, alors a admet une écriture trigonométrique (car $a \neq 0$), soit

$$a = ke^{i\theta} \qquad avec \quad k > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

et si on pose car $(a \neq 1)$:

$$\omega = \frac{b}{1-a}$$

on voit que $az+b = ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ et donc S est la composée de $H_{\Omega,k}$ avec $R_{\Omega,\theta}$ •

Remarque 1.3.3 *Une similitude directe dont l'application correspondante s'écrit*

$$z \mapsto az+b \qquad (avec \ \ (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \quad et \quad a \neq 1)$$

est la similitude de rapport $|a|$ d'angle $arg(a)$ et de centre $\Omega(\omega)$ qui vérifie (puisque c'est un point fixe) :

$$a\omega + b = \omega$$

∗

Proposition 1.3.5
Toute similitude directe du plan conserve les rapports des distances et les mesures d'angles orientées. ♣

Démonstration Soient $M_1(Z_1)$, $M_2(Z_2)$, $M_3(Z_3)$, $M_4(Z_4)$ quatre points du plan et leurs affixes. Notons $M_1'(Z_1')$, $M_2'(Z_2')$, $M_3'(Z_3')$, $M_4'(Z_4')$ leurs images. Pour chaque $i \in [|1,4|]$, on a

$$Z_i' = aZ_i + b \qquad (avec \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad a \neq 1)$$

Comme

$$\frac{Z_4' - Z_3'}{Z_2' - Z_1'} = \frac{(aZ_4 + b) - (aZ_3 + b)}{(aZ_2 + b) - (aZ_1 + b)} = \frac{a(Z_4 - Z_3)}{a(Z_2 - Z_1)} = \frac{Z_4 - Z_3}{Z_2 - Z_1}$$

on a alors

$$\frac{M_3'M_4'}{M_1'M_2'} = \frac{|Z_4' - Z_3'|}{|Z_2' - Z_1'|} = \frac{|Z_4 - Z_3|}{|Z_2 - Z_1|} = \frac{M_4M_3}{M_2M_1}$$

De même

$$(\overrightarrow{M_1'M_2'}, \overrightarrow{M_3'M_4'}) \equiv arg(\frac{Z_4' - Z_3'}{Z_2' - Z_1'}) \equiv arg(\frac{Z_4 - Z_3}{Z_2 - Z_1}) \equiv (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}) \quad [2\pi]$$

•