

Chapitre 2

Trigonométrie

Dans tout ce chapitre nous allons utiliser de l'exponentielle complexe et deux de ses propriétés fondamentales (ainsi que celles qui s'en déduisent) : Pour tout θ et ϕ réels on a :

$$(1) \quad |e^{i\theta}| = 1 \quad \text{et} \quad (2) \quad e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi}$$

$$(3) \quad e^{i\theta} = e^{ib} \iff \theta \equiv \phi \pmod{2\pi}$$

Remarquons que l'on déduit de (1) et (2)

$$(0) \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$$

Le but de ce chapitre est de retrouver (et non démontrer) certaines formules usuelles de trigonométrie, sachant que par définition

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$$

2.1 Relations fonctions Trigonométriques et l'exponentiel complexes

Soient a et b deux réels

Les Formules d'Euler :

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \quad \text{et} \quad \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

sont équivalentes à (0).

La formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

se retrouve isément à partir de (2)

La relation

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

équivalent à (1)

Dans (0), $e^{-ia} = \overline{e^{ia}}$ équivaut à dire que cosinus est une fonction paire et sinus une fonction impaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Enfin on retrouve grâce à (3) que : cosinus et sinus sont 2π périodiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Remarque 2.1.1 A partir des propriétés de l'exponentielle complexe on retrouve que, pour tout a et b réels :

$$\begin{aligned}\cos a = \cos b &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; \quad a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \\ \sin a = \sin b &\iff \exists k \in \mathbb{Z}; \quad a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi\end{aligned}$$

*

Preuve puisque

$$\cos a = \cos b \iff e^{ia} + e^{-ia} = 2 \cos b \iff Z^2 + 1 = 2 \cos b Z \quad \text{avec } Z = e^{ia}$$

Comme le discriminant réduit de $Z^2 - 2 \cos b Z + 1$ vaut $\Delta' = \cos^2 b - 1 = -\sin^2 b \leq 0$ et que celui-ci admet comme racine carrée $\delta' = i \sin b$, on en déduit que

$$\cos a = \cos b \iff Z = \cos b + i \sin b \quad \text{ou} \quad Z = \cos b - i \sin b \quad \text{avec } Z = e^{ia}$$

Soit

$$\cos a = \cos b \iff e^{ia} = e^{ib} \quad \text{ou} \quad e^{ia} = e^{-ib} \iff a \equiv b [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b [2\pi]$$

Pour les sinus les calculs sont analogues

$$\sin a = \sin b \iff e^{ia} - e^{-ia} = 2i \sin b \iff Z^2 - 1 = 2i \sin b Z \quad \text{avec } Z = e^{ia}$$

le discriminant réduit vaut ici $1 - \sin^2 b = \cos^2 b$ une racine carrée est $\cos b$ d'où les racines

$$Z = i \sin b + \cos b \quad \text{ou} \quad Z = i \sin b - \cos b$$

Soit

$$\sin a = \sin b \iff e^{ia} = e^{ib} \quad \text{ou} \quad e^{ia} = -e^{-ib} \iff e^{ia} = e^{ib} \quad \text{ou} \quad e^{ia} = e^{-i(\pi-b)}$$

D'où la conclusion (on a utilisé ici $e^{i\pi} = -1$ qui est une conséquence de (3) et (2)).

•

On définit 2 nouvelles fonctions

$$\begin{aligned}\tan : \quad \{x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cotan : \quad \{x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\end{aligned}$$

On a, pour tout x réel

$$\tan x = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{-ix} + e^{ix}} = i \frac{e^{-2ix} - 1}{e^{-2ix} + 1} = i \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}} \quad x \neq \pi/2 [\pi]$$

Exercice: trouver une formule équivalente pour la cotangente

Exercice: Montrer que si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$

$$\frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x} = e^{2ix}$$

tangente et cotangente sont π -périodiques et impaires.

En effet comme quotient d'une fonction paire et impaire il s'agit bien de fonctions impaires. Par ailleurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(x + \pi) = i \frac{1 - e^{2i(x+\pi)}}{1 + e^{2i(x+\pi)}} = i \frac{1 - e^{2ix+2i\pi}}{1 + e^{2ix+2i\pi}} = i \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}} = \tan x$$

La périodicité de la cotangente s'en suit puisqu'il s'agit de l'inverse pour la multiplication de la fonction tangente.

2.2 Formules d'addition

Pour tout a, b réels

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Ceci est strictement équivalent à $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

De même

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Ces deux formules se déduisent des deux précédentes en prenant $-b$ en lieu et place de b et en exploitant les parités des fonctions sinus et cosinus.

Proposition 2.2.1 *on a pour $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

De même pour $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$



Preuve Puisque $a+b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(a+b)$ est bien défini et d'après ce qui précède

$$\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Or, puisque $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\cos a \cos b \neq 0$. On peut diviser numérateur et dénominateur de l'expression de $\tan(a+b)$ par $\cos a \cos b \neq 0$

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Enfin pour la dernière formule, il suffit d'appliquer la formule précédente avec $-b$ en lieu et place de b sachant qu'alors (vu les hypothèses données sur a et b) on a bien

$$a + (-b) \neq \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{et} \quad -b \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On conclut alors grâce à la parité de la fonction tangente. •

2.3 sommes et produit

Proposition 2.3.1 *Quels que soient les réels a et b , on a :*

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$



Preuve En reprenant les formules précédentes et en additionnant membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \text{D'où } \cos(a-b) + \cos(a+b) &= 2 \cos a \cos b \end{aligned}$$

De même en soustrayant membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \text{D'où } \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b \end{aligned}$$

Enfin en faisant de même avec la fonction sinus, on trouve

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \text{D'où } \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b \end{aligned}$$

•

Proposition 2.3.2 Soient p et q deux réels :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \tan p + \tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \quad \text{avec } p \neq \pi/2 [\pi] \quad \text{et } q \neq \pi/2 [\pi] \\ \tan p - \tan q &= \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \quad \text{avec } p \neq \pi/2 [\pi] \quad \text{et } q \neq \pi/2 [\pi] \end{aligned}$$

♣

Preuve Ces formules sont directement conséquence des précédentes avec a et b tels que $p = a + b$ et $q = a - b$, c'est à dire

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} &= \frac{1}{2} (\cos q + \cos p) \\ \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} &= \frac{1}{2} (\cos q - \cos p) \\ \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} &= \frac{1}{2} (\sin p + \sin q) \end{aligned}$$

Enfin cette dernière identité devient lorsque l'on prend $-q$ en lieu et place de q (et grâce à la parité du sinus)

$$\sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2} (\sin p - \sin q)$$

Pour finir

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q}$$

D'où le résultat d'après la formule d'addition du cosinus.

Enfin du fait que $q \neq \pi/2 [\pi] \Rightarrow -q \neq \pi/2 [\pi]$ en prenant $-q$ en lieu et place de q dans la formule qui vient d'être démontrée, on trouve l'expression souhaitée pour $\tan p - \tan q$

•

2.4 angle double

Proposition 2.4.1 Pour tout x réel, on a :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{avec } x \neq \pi/2[\pi] \quad \text{et } 2x \neq \pi/2[\pi]$$



Exercice: le prouver

Remarque: les formules de linéarisation suivantes sont souvent utiles :

Pour x réel, on a

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

et

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{pour } x \neq \pi/2 [\pi]$$

2.5 l'arc moitié

Soit D la droite passant par $A(-1, 0)$ et ayant pour pente t . C'est la droite d'équation $y = tx + t$. lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ cette droite intersecte, en dehors de A , tous les points du cercle trigonométrique une seule fois. Si on note $M(\cos \theta; \sin \theta)$ un tel point, on a pour $\theta \neq \pi[2\pi]$:

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2} \quad (\text{pour } \theta \neq \pi/2[\pi])$$

On a ainsi construit un paramétrage du cercle trigonométrique privé de $A(-1, 0)$ par des fonctions rationnelles.

Or d'après le théorème de l'angle au centre

$$t = \tan \theta/2 \quad \text{pour } \theta \neq \pi[2\pi]$$

Ces expressions portent donc le nom de formules de l'arc moitié.

Exercice: Etablir les calculs qui ont conduit jusqu'aux formules de l'arc moitié

Solution :

Notons $M(x; y)$ le point autre que A sur le cercle trigonométrique et la droite D .

x et y vérifient $x^2 + y^2 = 1$ $y = t(x + 1)$ et $(x; y) \neq (-1; 0)$

Ce qui équivaut à $x^2 + y^2 = 1$ $y = t(x + 1)$ et $x \neq -1$

En remplaçant $y = t(x + 1)$ dans la première équation on trouve

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + t^2(x^2 + 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$\text{D'où } (1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \Rightarrow (1 + t^2)x = 1 - t^2 \Rightarrow x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{En injectant cette identité dans } y = t(x + 1), \text{ on trouve : } y = t \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right) = t \left(\frac{1 - t^2 + 1 + t^2}{1 + t^2} \right) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Autre Méthode de $y = t(x + 1)$ et $x^2 + y^2 = 1$ on en tire par substitution $x^2 + t^2(1 + 2x + x^2) = 1$ Soit

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0$$

D'où puisque $\Delta' = t^4 - (1 + t^2)(t^2 - 1) = 1$ on trouve les racines, ou encore on sait -1 est racine (évidente plus interdite), d'où si x est l'autre racine $x + 1 = -\frac{2t^2}{1 + t^2}$ ou encore $x \times (-1) = \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} \dots$

Exercice: montrer ces formules à l'aide des formules trigonométriques établies jusqu'ici.

Solution : Posons $t = \tan^2 \frac{\theta}{2}$. On écrit $\cos \theta = \cos 2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$, or $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$, D'où

$$\cos \theta = 2 \frac{1}{1 + t^2} - 1 = \frac{2 - t^2 - 1}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{De même } \sin \theta = \sin 2 \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Or } t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ et } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + t^2}, \text{ on en déduit. } \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

2.6 Valeurs remarquables

On connaît $e^{i2\pi} = 1$ et $e^{i\pi} = -1$. En admettant connu les sens de variations des fonctions cosinus et des sinus, on en déduit que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

ce qui est équivalent au tableau de valeurs remarquables.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

Par ailleurs, grâce à (2), on en déduit que pour tout x réel

$$e^{i(x+\pi)} = e^{i(x-\pi)} = -e^{ix}, \quad e^{i(\pi-x)} = -e^{ix}, \quad e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = ie^{ix}, \quad e^{i(x-\frac{\pi}{2})} = -ie^{ix}, \quad \text{et} \quad e^{i(\frac{\pi}{2}-x)} = ie^{ix}$$

D'où les relations

	sin	cos	tan
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$
$x + \pi$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$
$x - \pi$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$
$x + \frac{\pi}{2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cotan x$
$x - \frac{\pi}{2}$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cotan x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cotan x$

2.7 Linéarisation et Anti-linéarisation

2.7.1 Linéarisation

Il s'agit d'exprimer la puissance entière d'une fonction trigonométrique à l'aide d'une somme "pondérée" (on parle plutôt de combinaison linéaire) de fonctions trigonométriques.

Voici une proposition qui donne la formule générale, il s'agira surtout de savoir retrouver ces formules et de bien connaître la méthode de résolution

Proposition 2.7.1 *Pour tout n entier et x réel on a :*

Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, Alors :

$$2^{n-1} \cos^n x = \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \cos(n-2k)x + \frac{C_n^p}{2}$$

$$2^{n-1} \sin^n x = (-1)^p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_n^k \cos(n-2k)x + \frac{C_n^p}{2}$$

Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, Alors :

$$2^{n-1} \cos^n x = \sum_{k=0}^p C_n^k \cos(n-2k)x$$

$$2^{n-1} \sin^n x = (-1)^p \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k \sin(n-2k)x$$



Démonstration D'après la formule d'Euler, et en appliquant la formule du binôme de Newton on obtient :

$$(*) \quad 2^{n-1} \cos^n(x) = 2^{n-1} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)x}$$

Scindons cette somme en 2

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k \in [\frac{n}{2}, n[} C_n^k e^{i(2k-n)x} \right)$$

Appliquons le changement de variable $k' = n - k$ dans la deuxième somme ($\varphi : k \mapsto n - k$ envoie $[\frac{n}{2}, n[$ de façon bijective sur $[0, \frac{n}{2}[$) :

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k' \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^{n-k'} e^{-i(2k'-n)x} \right)$$

Or pour tout $k' \in \mathbb{N}$, $C_n^{n-k'} = C_n^{k'}$. D'où en séparant en deux paquets la première somme et en renommant k l'indice de la dernière somme, on voit que :

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k \in \{\frac{n}{2}\} \cap \mathbb{N}} C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k e^{-i(2k-n)x} \right)$$

Soit par regroupement de la première et dernière somme

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k (e^{i(2k-n)x} + e^{-i(2k-n)x}) + \sum_{k \in \{\frac{n}{2}\} \cap \mathbb{N}} C_n^k e^{i(2k-n)x} \right)$$

D'où par la formule d'Euler

$$(A) \quad 2^{n-1} \cos^n(x) = \sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} C_n^k \cos(2k-n)x + \frac{1}{2} \sum_{k \in \{\frac{n}{2}\} \cap \mathbb{N}} C_n^k e^{i(2k-n)x}$$

Par des calculs similaires on trouve

$$(**) \quad 2^{n-1} \sin^n(x) = 2^{n-1} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{(-i)^n}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} (-1)^{n-k} e^{-i(n-k)x} = \frac{i^n}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x}$$

On a utilisé le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{-k} = (-1)^k$. Poursuivons les calculs comme pour la première partie :

$$2^{n-1} \sin^n(x) = \frac{i^n}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k' \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^{n-k'} C_n^{k'} e^{-i(2k'-n)x} \right)$$

$$2^{n-1} \sin^n(x) = \frac{i^n}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x} + \sum_{k \in \{\frac{n}{2}\} \cap \mathbb{N}} (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x} + (-1)^n \sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^k C_n^k e^{-i(2k-n)x} \right)$$

Soit par regroupement de la première et dernière somme

$$(B) \quad 2^{n-1} \sin^n(x) = \frac{i^n}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^k C_n^k (e^{i(2k-n)x} + (-1)^n e^{-i(2k-n)x}) + \sum_{k \in \{\frac{n}{2}\} \cap \mathbb{N}} (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x} \right)$$

Pour finir discutons sur la parité de n .

Si $n = 2p$ est pair **Alors**, puisque le dernier terme dans les expressions (A) et (B) ne contient qu'un terme et la première somme est indexée sur $[0, p-1]$, on a

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \cos(2k-n)x + \frac{1}{2} C_n^p \overbrace{e^{i(2p-n)x}}^1$$

$$2^{n-1} \sin^n(x) = \frac{(-1)^p}{2} \left(\sum_{k \in [0, \frac{n}{2}[[} (-1)^k C_n^k (e^{i(2k-n)x} + e^{-i(2k-n)x}) + (-1)^p C_n^p \overbrace{e^{i(2p-n)x}}^1 \right)$$

Et on conclut grâce à la formule d'Euler.

Si $n = 2p + 1$ est pair **Alors**, puisque le dernier terme dans les expressions (A) et (B) ne contient aucun terme est la première somme est indexée sur $[0, p]$, on a

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \sum_{k=0}^p C_n^k \cos(2k-n)x$$

$$2^{n-1} \sin^n(x) = -\frac{(-1)^p i}{2} \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k (e^{i(2k-n)x} - e^{-i(2k-n)x})$$

Et on conclut grâce à la formule d'Euler. •

Remarque 2.7.1 On aurait pu conclure beaucoup plus rapidement en utilisant l'astuce suivante à partir des expression (*) et (**)

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \operatorname{Re}(2^{n-1} \cos^n(x)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)x} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k \operatorname{Re}(e^{i(2k-n)x})$$

$$2^{n-1} \sin^n(x) = \operatorname{Re}(2^{n-1} \sin^n(x)) = \operatorname{Re} \left(\frac{i^n}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{i(2k-n)x} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \operatorname{Re}(i^n e^{i(2k-n)x})$$

Et donc

$$2^{n-1} \cos^n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(2k-n)x$$

$$2^{n-1} \sin^n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cos[(2k-n)x + n\frac{\pi}{2}]$$

Cependant ces formules sont moins économiques car ayant deux fois plus de termes que les précédentes elles sont bien couteuses en temps de calcul (à la main) *

Remarque 2.7.2 Les formules de linéarisation se déduisent les unes des autres grâce aux relations

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{et} \quad \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

En effet, on a par exemple pour $n = 2p$

$$2^{n-1} \sin^n x = 2^{n-1} \cos^n \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \cos \left[(n-2k) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{C_n^p}{2}$$

D'où le résultat grâce à

$$\cos \left[(n-2k) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \cos [(n-2k)x - (p-k)\pi] = \cos [(p-k)\pi] \cos(n-2k)x = (-1)^{p-k} \cos(n-2k)x$$

Il est à noter que $(-1)^{p-k} = (-1)^p (-1)^{-k} = (-1)^p (-1)^k$ *

Remarque: pour $n = 2$, on retrouve les linéarisations du paragraphe 4.
pour $n = 3$, on a

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x) \quad \text{et} \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

2.7.2 Anti-Linéarisation

Il s'agit de l'opération inverse à la précédente

Proposition 2.7.2 *Pour tout x réel et n entier, on a (avec un léger abus de notation)*

$$\begin{aligned}\cos nx &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} C_n^{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x \\ \sin nx &= \sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} C_n^{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x\end{aligned}$$

♣

Démonstration d'après la formule de Moivre

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k \cos^{n-k} x \sin^k x$$

Une sommation par paquets nous donne avec

$$\mathcal{P} = \{2k; k \in [0, n/2[]\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{2k+1; k \in [0, n/2[]\}$$

et donc

$$\cos nx + i \sin nx = \sum_{a \in \mathcal{P}} C_n^a i^a \cos^{n-a} x \sin^a x + \sum_{b \in \mathcal{I}} C_n^b i^b \cos^{n-b} x \sin^b x$$

Si l'on a posé $\varphi : k \mapsto 2k$ (resp. $\psi : k \mapsto 2k+1$), comme il s'agit de bijections de $[0, n/2[]$ sur $\mathcal{P}$ (resp. de $[0, n/2[]$ sur $\mathcal{I}$ on en déduit par changement de variable

$$\cos nx + i \sin nx = \sum_{k \in [0, n/2[]} C_n^{2k} i^{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x + \sum_{k \in [0, n/2[]} C_n^{2k+1} i^{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x$$

Soit avec un léger abus de notation, on trouve

$$\cos nx + i \sin nx = \sum_{0 \leq k \leq n/2} C_n^{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x + i \sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} C_n^{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x$$

D'où la conclusion par identification des parties réelles et imaginaires

•

Remarque 2.7.3 *Dans la pratique on n'applique pas la formule directement, mais on applique la méthode calcul adaptée au nombre n donné.*

*

2.7.3 Simplification d'une somme

Une façon souvent efficace de réaliser des calculs linéaires ne faisant intervenir qu'un "type" de fonctions trigonométriques est de voir cette expression comme la partie réelle ou imaginaire d'une expression complexe faisant intervenir l'exponentielle complexe. Ainsi par exemple.

Proposition 2.7.3 *Pour tout x réel avec $x \neq 0[2\pi]$ et n entier on a*

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin[(n+1)\frac{x}{2}] \cos[\frac{nx}{2}]}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{\sin[(n+1)\frac{x}{2}] \sin[\frac{nx}{2}]}{\sin \frac{x}{2}}$$

♣

Preuve Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

On en déduit d'après la formule d'une somme d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ que

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)\frac{x}{2}} [e^{-i(n+1)\frac{x}{2}} - e^{i(n+1)\frac{x}{2}}]}{e^{i\frac{x}{2}} [e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}]}$$

Soit d'après la formule d'Euler

$$S_n = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{-2i \sin[(n+1)\frac{x}{2}]}{-2i \sin \frac{x}{2}}$$

D'où la conclusion en identifiant parties entières et imaginaires

•