

Table des matières

4	Géométrie élémentaire de l'espace	3
4.1	Modes de Repérage dans l'espace	3
4.1.1	Coordonnées Cartésiennes	3
4.1.2	Coordonnées Cylindriques et Sphériques	6
4.2	Produit Scalaire	8
4.2.1	Définitions et Propriétés	8
4.2.2	Projection orthogonale et vecteur normal	9
4.2.3	Bases orthonormées	13
4.3	Produit Vectoriel	14
4.3.1	Définitions et Propriétés	14
4.3.2	Applications	17
4.4	Déterminant ou Produit Mixte	18
4.4.1	Définitions et Propriétés	18
4.4.2	Applications	19
4.5	Plans de l'espace	20
4.5.1	Equations	20
4.5.2	Plans remarquables	22
4.5.3	Applications	23
4.6	Droites de l'Espace	23
4.6.1	Equations	24
4.6.2	Droites Remarquables	24
4.7	Sphères de l'espace	27
4.7.1	Equations	27
4.7.2	Intersections, Droites et Plans remarquables	28

Chapitre 4

Géométrie élémentaire de l'espace

Notons $\mathcal{E}$ l'espace affine (ensemble des points de l'espace) et $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé (ensemble des vecteurs de l'espace).

Comme pour le plan, on peut munir $\vec{\mathcal{E}}$ d'une loi de composition interne $+$ (somme de vecteurs).

On peut également lui adjoindre une loi de composition externe $\cdot$ (multiplication d'un vecteur par un scalaire réel).

Ces lois confèrent à $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

4.1 Modes de Repérage dans l'espace

4.1.1 Coordonnées Cartésiennes

Définition 4.1.1 (système libre)

On dit que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs est libre lorsqu'ils sont non coplanaires.

Cela implique en particulier que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont tous les trois non nuls et distincts.

On a la caractérisation suivante :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ libre} \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies (a, b, c) = (0, 0, 0) \right]$$

lorsque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas un système libre, on dit que le système est lié.

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ est ce qu'on appelle une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ à l'aide des coefficients a, b et c . ♠

Preuve Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un système libre. si par l'absurde l'un des vecteurs est nul, par exemple $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$ ce qui signifie que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires... contradiction

Pour montrer la caractérisation annoncée, il suffit de montrer que

$$\text{non} \left((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ libre} \right) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{non} \left(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies (a, b, c) = (0, 0, 0) \right] \right)$$

c'est à dire :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \quad \text{si et seulement si} \quad \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \right]$$

soit encore : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires si et seulement si

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left[a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (a \neq 0 \quad \text{ou} \quad b \neq 0 \quad \text{ou} \quad c \neq 0) \right]$$

• Montrons l'implication directe :

Supposons ces trois vecteurs coplanaires, ce qui signifie que l'un s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Par exemple on a pour un couple de réels (α, β)

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

Et donc on a en posant $(a, b, c) = (-1, \alpha, \beta)$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \quad \text{et} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

• Montrons la réciproque :

Supposons $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Si par exemple $a \neq 0$, on en déduit

$$\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w}$$

On en déduit que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

Les calculs étant analogues dans les autres cas ($b \neq 0$ et $c \neq 0$), on a bien montré en toute généralité la réciproque. •

Exercice : écrire la caractérisation d'un système de trois vecteurs liés.

Définition 4.1.2 (Repère et coordonnées cartésiennes)

Soient Ω un point de l'espace $\mathcal{E}$, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un système libre.

On dit alors que $\mathcal{R} := (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (resp. $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$) est un repère de $\mathcal{E}$ (resp. une base de $\vec{\mathcal{E}}$).

Ω est l'origine du repère $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont respectivement le premier, deuxième et le troisième vecteur de base.

Tout point M (resp. tout vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$) admet une écriture unique de la forme :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

On dit que $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel de dimension 3.

(x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ (resp. du point M) dans le repère $\mathcal{R}$ (resp. la base $\mathcal{B}$). ♠

Preuve Nous ne montrerons pas qu'une telle décomposition existe, mais son unicité

unicité : si par l'absurde $\overrightarrow{\Omega M}$ admet deux décompositions suivant la base $\mathcal{B}$

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega M} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$$

On en déduit (d'après les propriétés des lois $+$ et $\cdot$)

$$\vec{0} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) - (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) = (x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2 + (z - z')\vec{e}_3$$

Or le système $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant libre cette combinaison linéaire ne peut contenir que des coefficients nuls :

$$x - x' = 0 \quad y - y' = 0 \quad \text{et} \quad z - z' = 0$$

D'où la contradiction. •

Exemple : En notant $O = (0, 0, 0)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$ on voit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de $\mathbb{R}^3$. Ce repère porte le nom de repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4.1.1 La donnée d'une base $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ permet d'identifier $\vec{\mathcal{E}}$ à $\mathbb{R}^3$ au moyen de l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{R}^3} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (x, y, z) &\longmapsto x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Cette application est bijective (surjective et injective) et $\mathbb{R}$ -linéaire.

On dit qu'elle réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\mathcal{E}}$. ♣

La preuve est identique à celle concernant $\varphi_{\mathbb{R}^2}$

Remarque 4.1.1 Ces identifications dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$.

Avec les notations ci-dessus :

$\varphi_{\mathbb{R}^3}((x, y, z))$ désigne le vecteur $\vec{u}$ coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{B}$, on note $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$.

*

Remarque 4.1.2 Ces identifications (relatives à une base $\mathcal{B}$) nous permettent de voir l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^3$ avec compatibilité des lois vectorielles :
la somme de deux vecteurs correspond à la somme des triplets de coordonnées relatives à $\mathcal{B}$.
Le produit d'un vecteur par un scalaire correspond au produit du triplet des coordonnées relatives à $\mathcal{B}$ par un réel. *

Exercice: Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\vec{\mathcal{E}}$. Montrer que $\vec{u}_1(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}}$ est colinéaire à $\vec{u}_2(x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{B}}$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 4.1.3 Tout comme à $\mathcal{P}$ on peut adjoindre à $\mathcal{E}$ une structure affine (relativement à un point choisi dans $\mathcal{E}$). Ceci nous permet alors de dire que pour $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un repère fixé, $\mathcal{E}$ s'identifie comme espace affine à $\mathbb{R}^3$ au moyen de l'isomorphismes d'espace affines

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}^3} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (x, y, z) &\mapsto \Omega + (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \end{aligned}$$

Où la notation $\Omega + \vec{u}$ désigne l'unique point M tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{u}$.

Cette identification dépend du choix du repère $\mathcal{R}$.

Avec les notations ci-dessus :

$\Psi_{\mathbb{R}^3}((x, y, z))$ désigne le point de M coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{R}$, on note $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$. *

Définition 4.1.3 (Caractérisation d'un plan)

Tout plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par la donnée d'un point A et de deux vecteurs libres $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. On note $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$.

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}, \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \text{ sont coplanaires} \iff \overrightarrow{AM} \text{ est combinaison linéaire de } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2$$

On dit que $\mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$ est le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$, on le note $\vec{\mathcal{P}}$ (c'est l'ensemble de vecteurs admettant un représentant dans $\mathcal{P}$) ♠

Définition 4.1.4 (Vecteurs Orthogonaux)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soit $\vec{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel qui les contient.

On dit que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (vus dans $\vec{\mathcal{P}}$) le sont. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$ ♠

Définition 4.1.5 (plan et angles orientés)

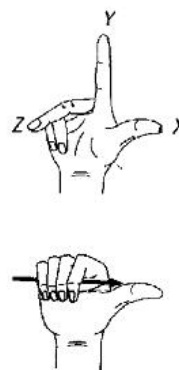
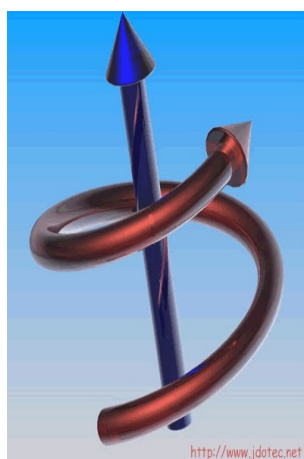
Soit $\vec{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel défini à l'aide de deux vecteurs libres $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{n}$ un vecteur (non nul) orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On dira que $\vec{n}$ oriente $\vec{\mathcal{P}}$ lorsque l'on choisi d'orienter $\vec{\mathcal{P}}$ de façon dextrogyre par rapport $\vec{n}$:

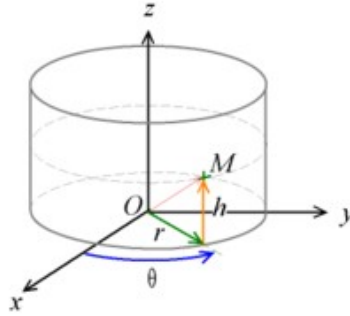
i.e

lorsque l'on visse dans le sens positif on avance dans le sens de $\vec{n}$



h est la cote de M (resp $\overrightarrow{OM}$)

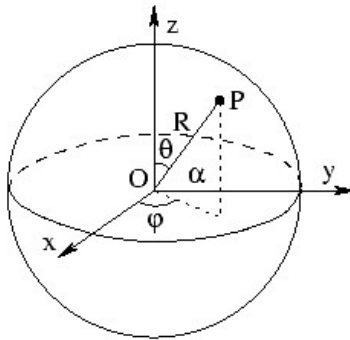
(r, θ) est un couple de coordonnées polaires de m projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ (vu dans $\mathcal{P}$) ♠



Proposition 4.1.2 (Changement de Coordonnées) Soit M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et de coordonnées cylindriques (r, θ, h) relativement à $\mathcal{R}$. On a alors

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= h \end{cases}$$

♣



Définition 4.1.9 (Coordonnées Sphériques)

soit M (resp. $\overrightarrow{OM}$) un point (resp. un vecteur) de l'espace. on dit qu'il a pour coordonnées sphériques (R, θ, φ) relativement à $\mathcal{R}$, lorsque $R \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ vérifient

$$\overrightarrow{OM} = R \sin \theta \vec{u}_\varphi + R \cos \theta \vec{k}$$

R est la norme de $\overrightarrow{OM}$

θ est la colatitude de M , c'est une mesure de l'écart angulaire non orienté $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$

φ est la longitude (ou azimuth) de M , c'est une mesure de l'angle polaire de m projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ (vu dans $\mathcal{P}$) ♠

Remarque 4.1.5 Dans le plan $\mathcal{P}'$ passant par O engendré par $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{k}$, le point M (vu dans $\mathcal{P}$) admet (R, θ) pour coordonnées polaires relativement à l'axe polaire $(O, \vec{k})$.

l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ s'appelle la latitude de M *

Proposition 4.1.3 (Changement de Coordonnées) Soit M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et de coordonnées sphériques (R, θ, φ) relativement à $\mathcal{R}$. On a alors

$$\begin{cases} x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta \end{cases}$$

♣

Définition 4.1.10 (Equation cartésienne)

Soit Γ un ensemble de points de l'espace, et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{E}$ est une fonction donnée. On dit que

$$f(x, y, z) = 0$$

est une équation cartésienne de Γ relativement au repère $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, lorsque :
 Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient

$$f(x, y, z) = 0$$

On a

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad \overrightarrow{\Omega M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = 0\}$$

**Définition 4.1.11 (Equations paramétrées)**

Soit Γ un ensemble de points de l'espace, et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions réelles. On dit que

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in \Lambda$$

est une équation paramétrée de Γ relativement au repère $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, lorsque :
 Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{et} \quad z = h(t) \quad \text{avec} \quad t \in \Lambda$$

Λ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$), Dans la pratique il s'agira souvent d'un intervalle (ou produit d'intervalles).

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists t \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{\Omega M} = f(t)\vec{e}_1 + g(t)\vec{e}_2 + h(t)\vec{e}_3\}$$



On définit de même les équations cylindriques et sphériques d'un ensemble de points de l'espace donné.

4.2 Produit Scalaire

4.2.1 Définitions et Propriétés

Etant donné que deux vecteurs peuvent toujours être vus dans un plan le contenant on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace comme celui de ces mêmes vecteurs vu dans un plan. Cette définition est indépendante du choix du plan choisi. Plus précisément on a

Définition 4.2.1 (Géométrie) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta && \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

Où θ est une mesure (non orientée) de l'écart angulaire $(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour éviter toute confusion avec la loi de composition externe, on note aussi $(\vec{u} | \vec{v})$ ou $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ pour désigner le produit scalaire.



ainsi le produit scalaire dans l'espace vérifie les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan. A savoir :

Proposition 4.2.1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Proposition 4.2.2 l'application produit scalaire $(\cdot) : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et symétrique.



Corollaire 4.2.3 soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}|\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u}|\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v}|\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u}|\vec{v}) &= \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\end{aligned}$$



En effet pour se convaincre de la véracité des propositions ci-dessus, il suffit de constater que les notions de somme, différence, multiplication par un scalaire, produit scalaire, norme, écart angulaire non orienté et orthogonalité de deux vecteurs de l'espace coïncident avec celles de somme, différence, multiplication par un scalaire, produit scalaire, norme, mesure d'angle non orienté et orthogonalité de ces deux mêmes vecteurs vus dans un plan les contenant.

On retrouve alors les propriétés similaires suivantes.

Proposition 4.2.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{E}}$, on note $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ on a alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$



Preuve Par bilinéarité du produit scalaire on a

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (xe_1 + ye_2 + ze_3) \cdot (x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) \\ &= x(x'e_1 \cdot e_1 + y'e_1 \cdot e_2 + z'e_1 \cdot e_3) + y(x'e_2 \cdot e_1 + y'e_2 \cdot e_2 + z'e_2 \cdot e_3) + z(x'e_3 \cdot e_1 + y'e_3 \cdot e_2 + z'e_3 \cdot e_3) \\ &= x(x'e_1 \cdot e_1) + y(y'e_2 \cdot e_2) + z(z'e_3 \cdot e_3) \quad (\text{car vecteurs 2 à 2 orthogonaux}) \\ &= xx' + yy' + zz' \quad (\text{car vecteurs normés})\end{aligned}$$



Corollaire 4.2.5 Les coordonnées (x, y, z) d'un vecteur $\vec{u}$ relativement à une b.o.n. $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, sont données par

$$x = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \quad y = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad z = \vec{u} \cdot \vec{e}_3$$



Corollaire 4.2.6 Soit $\mathcal{R}$ un r.o.n. Si $A(x_A, y_A, z_A)_{\mathcal{R}}$ et $B(x_B, y_B, z_B)_{\mathcal{R}}$, alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

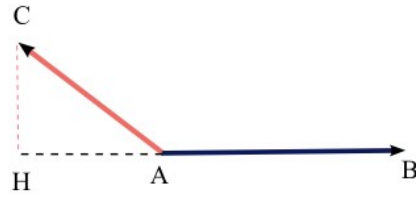
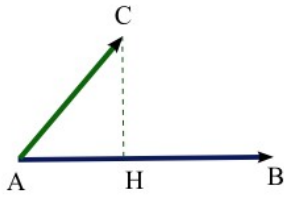


Exercice: Démontrer le théorème de Pythagore :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

4.2.2 Projection orthogonale et vecteur normal

les notions de mesure algébrique sur une droite orientée, et de projeté orthogonal sur une droite (ainsi que sa caractérisation en terme de distance) restant en tout point identique à celles décrites dans le plan on a



Proposition 4.2.7 (Interprétation en terme de projection) Soient A, B, C trois points de l'espace. et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

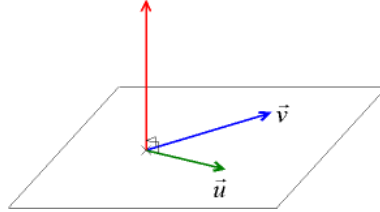
où $\overrightarrow{AH}$ est la mesure algébrique relativement à la droite (AB) orientée par $\overrightarrow{AB}$ ♣

Définition 4.2.2 (Normale à un plan) Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A et dont deux vecteurs libres sont donnés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que $\vec{n}$ (vecteur non nul) est normal au plan $\mathcal{P}$ (ou encore que $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\vec{n}$) lorsque

$$\vec{n} \perp \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{n} \perp \vec{v}$$

Cette définition est indépendante du choix de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Plus précisément :

Pour tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{P}$ on a $\vec{w} \perp \vec{n}$ ♠



Preuve Tout vecteur de $\vec{w}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (car $(A, \vec{u}, \vec{v})$ forme une repère de $\mathcal{P}$). Et donc

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{d'où} \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = a\vec{u} \cdot \vec{n} + b\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

•

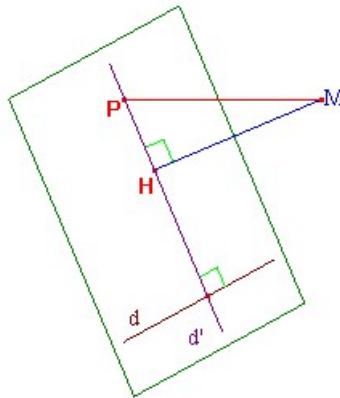
Corollaire 4.2.8 Une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ♣

Définition 4.2.3 Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A et dont deux vecteurs libres sont donnés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est l'unique point H vérifiant

$$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \quad \overrightarrow{MH} \perp \vec{v} \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{P}$$

H est l'unique point qui minimise la fonction $P \mapsto d(M, P)$ lorsque P parcourt $\mathcal{P}$,

on dit que $d(M, \mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} MH$ est la distance de M à $\mathcal{P}$. ♠



Preuve Nous ne montrerons pas l'existence elle sera une conséquence de l'existence d'un vecteur normal à tout plan. la preuve de l'unicité est laissée en exercice.

Soit H le projeté orthogonal, montrons sa caractérisation à l'aide de la distance :

En effet si $M = H$, il n'y a rien à montrer. Supposons alors que $M \neq H$

• Montrons que H minimise la distance de M aux points de $\mathcal{P}$.

On a alors $\overrightarrow{MH}$ est normal à $\mathcal{P}$, et donc orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$ comme par exemple $\overrightarrow{PH}$ lorsque $P \in \mathcal{P}$. Ainsi d'après le théorème de Pythagore on a :

$$(*) \quad \|\overrightarrow{PM}\|^2 = \|\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{PH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HM}\|^2$$

Ainsi pour tout P de $\mathcal{P}$, on a bien $PM \geq HM$

• Montrons que H l'unique point qui réalise cette distance.

En effet si $H' \in \mathcal{P}$ est un point distinct de H qui réalise ce minimum alors on a, grâce à Pythagore :

$$H'M^2 = H'H^2 + HM^2 = H'H^2 + H'M^2 \quad \text{d'où} \quad HH' = 0$$

Et donc $H' = H$ ce qui est une contradiction, on a donc montré par l'absurde qu'il n'y a que le projeté H qui réalise ce minimum. •

Remarque 4.2.1 En reprenant les notations de la proposition on a $\mathcal{P} \cap (M + \mathbb{R}\vec{n}) = \{H\}$ *

Proposition 4.2.9 Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non colinéaires.

1. Il existe un vecteur non nul $\vec{w}_0$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$
2. les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les vecteurs $\lambda\vec{w}_0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$
3. les vecteurs orthogonaux à $\vec{w}_0$ sont les combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

♣

Preuve Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un r.o.n. Posons :

$$\vec{u}_1(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2(x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{R}}$$

Comme ils ne sont pas colinéaires on a par exemple (les autres cas étant similaires on ne traitera que cet exemple)

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{D'où} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

soit $\vec{w}(X, Y, Z)_{\mathcal{R}}$

$$\vec{w} \perp \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{w} \perp \vec{u}_2 \iff \begin{cases} x_1X + y_1Y + z_1Z = 0 \\ x_2X + y_2Y + z_2Z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1X + y_1Y = -z_1Z \\ x_2X + y_2Y = -z_2Z \end{cases}$$

Or à Z fixé ce système 2×2 est un système de Cramer et son unique couple solution est donné par

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -z_1Z & y_1 \\ -z_2Z & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_1Z \\ x_2 & -z_2Z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Posons

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -z_1 & y_1 \\ -z_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{et} \quad B = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Par bilinéarité du déterminant on a

$$\vec{w} \perp \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{w} \perp \vec{u}_2 \iff X = AZ \quad \text{et} \quad Y = BZ$$

• Montrons la première assertion : le vecteur $\vec{w}_0(A, B, 1)_{\mathcal{R}}$ convient

• Montrons la deuxième assertion.

on a montré que

$$\vec{w} \perp \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{w} \perp \vec{u}_2 \iff \vec{w} = Z \vec{w}_0$$

• Montrons la troisième assertion.

Par bilinéarité du produit scalaire les combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonales à $\vec{w}_0$.

Réciproquement soit $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ orthogonal à $\vec{w}_0$, on veut montrer que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Rappelons que par non colinéarité de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, on a (par exemple)

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

On peut donc trouver un couple (λ, μ) (et un seul) solution du système

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \mu x_2 = x \\ \lambda y_1 + \mu y_2 = y \end{cases}$$

Comme par ailleurs $\vec{w}_0(A, B, 1)_{\mathcal{R}}$ étant orthogonal à $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}$ on a

$$-Ax_1 - By_1 = z_1 \quad -Ax_2 - By_2 = z_2 \quad \text{et} \quad -Ax - By = z$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \mu x_2 = x \\ \lambda y_1 + \mu y_2 = y \end{cases} \implies \lambda z_1 + \mu z_2 = -A(\lambda x_1 + \mu x_2) - B(\lambda y_1 + \mu y_2) = -Ax - By = z$$

Donc

$$\vec{u} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2$$

•

Corollaire 4.2.10

Tout plan admet un vecteur normal $\vec{n}$, et tout autre vecteur normal est colinéaire à celui-ci.

Réciproquement si $\vec{n}$ est un vecteur non nul et A un point de l'espace, il existe un et un seul plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. On le note $A + (\mathbb{R}\vec{n})^\perp$

$$M \in A + (\mathbb{R}\vec{n})^\perp \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

♣

Preuve Puisque tout plan $\mathcal{P}$ s'écrit $A + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ libres. la proposition précédente nous montre et nous caractérise les normales à $\mathcal{P}$.

Réciproquement si $\vec{n} \neq \vec{0}$ on peut considérer un certain plan le contenant, or vu dans ce plan $\vec{n}$ admet un vecteur orthogonal non nul, notons le $\vec{u}_1$.

Vu dans $\mathcal{E}$, $\vec{u}_1$ reste orthogonal à $\vec{n}$.

Puisque $\vec{n} \perp \vec{u}_1$ ils sont non colinéaires (le prouver) et donc la proposition précédente nous affirme qu'il existe un vecteur $\vec{u}_2$ non nul orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{n}$.

On en déduit que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs libres orthogonaux à $\vec{n}$ et donc d'après la proposition précédente

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \text{ est combinaison linéaire de } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \iff M \in A + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$$

•

Remarque 4.2.2 Tout plan admet exactement deux vecteurs unitaires normaux $\vec{n}$ et $-\vec{n}$. Ces deux vecteurs donnent les deux orientations possibles du plan. *

Proposition 4.2.11 Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont $\vec{u}$ est un vecteur normal ♣

Preuve • Soit M_0 un point vérifiant $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = k$ (l'existence de ce point est laissée en exercice).

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 0 \iff \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) = 0$$

Soit

$$M \in \Delta_k \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0 \iff M \in M_0 + (\mathbb{R} \vec{u})^\perp$$

• Réciproquement, nous avons vu que tout plan de normal $\vec{u}$ et passant par M_0 vérifie

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{u} = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$$

où l'on a posé $k = \overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}$

Proposition 4.2.12 Soit $\mathcal{P}$ la plan passant par A et de normale $\vec{n}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Preuve Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ puisque $\overrightarrow{AH} \perp \vec{n}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}_{=0} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{HM}\| \|\vec{n}\| \cos(\theta)$$

où la mesure algébrique est orientée par $\vec{n}$

4.2.3 Bases orthonormées

Proposition 4.2.13 Tout vecteur $\vec{u}$ normé peut être complété en une base orthonormée de l'espace même en une b.o.n.d de l'espace.

Il en va de même lorsque l'on se donne un point et un vecteur qui peuvent être complétés en un r.o.n. voire r.o.n.d. d'origine et de premier vecteur...

Preuve

Proposition 4.2.14 (Changement de Base)

Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ deux b.o.n. de l'espace.

On note

$$\vec{e}_1'(a_1, b_1, c_1)_{\mathcal{B}} \quad \vec{e}_2'(a_2, b_2, c_2)_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_3'(a_3, b_3, c_3)_{\mathcal{B}}$$

Soit $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u}(x', y', z')_{\mathcal{B}'}$, alors

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

Preuve Il suffit de voir pour le premier système coordonnés que

$$\vec{u} = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2' + z' \vec{e}_3' = x'(a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3) + y'(a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3) + z'(a_3 \vec{e}_1 + b_3 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3)$$

D'où les coordonnées relativement à $\mathcal{B}$.

A partir du système obtenu on alors en notant $(L_1), (L_2), (L_3)$ les trois lignes de ce système on obtient le système suivant où

$$(L'_i) \leftarrow a_i(L_1) + b_i(L_2) + c_i(L_3) \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = a_1(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z') + b_1(b_1 x' + b_2 y' + b_3 z') + c_1(c_1 x' + c_2 y' + c_3 z') \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = a_2(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z') + b_2(b_1 x' + b_2 y' + b_3 z') + c_2(c_1 x' + c_2 y' + c_3 z') \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = a_3(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z') + b_3(b_1 x' + b_2 y' + b_3 z') + c_3(c_1 x' + c_2 y' + c_3 z') \end{cases}$$

On conclut grâce au fait que pour $i \neq j$ avec i, j pris dans $\{1, 2, 3\}$

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = \|\vec{e}_i'\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = 0$$

Remarque 4.2.3 le système exprimant le passage des nouvelles aux anciennes coordonnées reste valable pour des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ quelconques. *

Remarque 4.2.4 Comme pour le plan, le passage de l'ancienne à la nouvelle base se fait de façon contravariante par rapport au passage des anciennes aux nouvelles coordonnées.

$$\begin{cases} \vec{e}_1' &= a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' &= a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' &= a_3 \vec{e}_1 + b_3 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{cases}$$

*

Corollaire 4.2.15 (Changement de repères orthonormés)

Soient $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ deux b.o.n. de l'espace.

On note

$$\vec{e}_i'(a_i, b_i, c_i)_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \Omega'(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}}$$

Soit $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ et $M(x', y', z')_{\mathcal{R}'}$, alors

$$\begin{cases} x &= \alpha + a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y &= \beta + b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z &= \gamma + c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' &= a_1(x - \alpha) + b_1(y - \beta) + c_1(z - \gamma) \\ y' &= a_2(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + c_2(z - \gamma) \\ z' &= a_3(x - \alpha) + b_3(y - \beta) + c_3(z - \gamma) \end{cases}$$

♣

4.3 Produit Vectoriel

Dans toute cette section l'espace est rapporté au r.o.n.d. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

4.3.1 Définitions et Propriétés

Définition 4.3.1 (Géométrie) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par

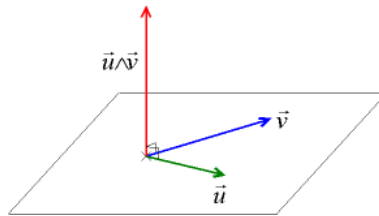
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{n} & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non colinéaires} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Dans le cas non colinéaire :

Notons $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\vec{\mathcal{P}}$ directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.

θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ orienté par $\vec{n}$. ♠



Remarque 4.3.1 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$ et de norme $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

On peut s'aider de la règle des trois doigts.

*

Remarque 4.3.2 la proposition caractérisant les vecteurs orthogonaux à deux vecteurs indépendants nous donne :

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non colinéaires.

- Anti-symétrie.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c'est trivial. sinon cela découle du fait que :

$$\vec{n}_{\vec{u}, \vec{v}} = -\vec{n}_{\vec{v}, \vec{u}} \quad \text{et} \quad \text{Det}_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\text{Det}_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{v}, \vec{u}) = \text{Det}_{\vec{v}, \vec{u}}(\vec{u}, \vec{v})$$

Grâce à cette antisymétrie il suffit de prouver la linéarité par rapport à la deuxième composante.

- Homogénéité relativement à la deuxième composante.

Si $\lambda \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est trivial. Sinon cela découle de

$$\vec{n}_{\lambda \vec{u}, \vec{v}} = \frac{|\lambda|}{\lambda} \vec{n}_{\vec{u}, \vec{v}} \quad \text{et} \quad \text{Det}_{\lambda \vec{u}, \vec{v}}(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \lambda \text{Det}_{\lambda \vec{u}, \vec{v}}(\vec{v}, \vec{u}) = \lambda \frac{|\lambda|}{\lambda} \text{Det}_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}, \vec{v})$$

- Additivité relativement à la deuxième composante.

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ avec $\vec{u}$ non nul (sinon trivial) .

Notons $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AD}$, avec les notations de la remarque précédente on a

$$B_1 = \Pi_u(B) \quad B_2 = \text{Rot}_u(B_1) \quad \text{et} \quad B_3 = \text{Hom}_u(B_2)$$

idem pour C et D .

Alors on a par affinité de la projection orthogonale, de la rotation et de l'homothétie.

$$\overrightarrow{AD_i} = \overrightarrow{AB_i} + \overrightarrow{AC_i}$$

Montrons le pour $i = 1$

D'après la proposition dire que $\vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$ équivaut à dire que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Ainsi par définition du projeté orthogonal

$$\overrightarrow{BB_1} = \beta \vec{u} \quad \overrightarrow{CC_1} = \gamma \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DD_1} = \delta \vec{u}$$

et comme $B_1 \in \mathcal{P}, C_1 \in \mathcal{P}, D_1 \in \mathcal{P}$ (par définition du projeté orthogonal) mais aussi $A \in \mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{u} = 0 \quad \overrightarrow{AC_1} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{u} = 0$$

Puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on en déduit que

$$(*) \quad \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{CC_1}$$

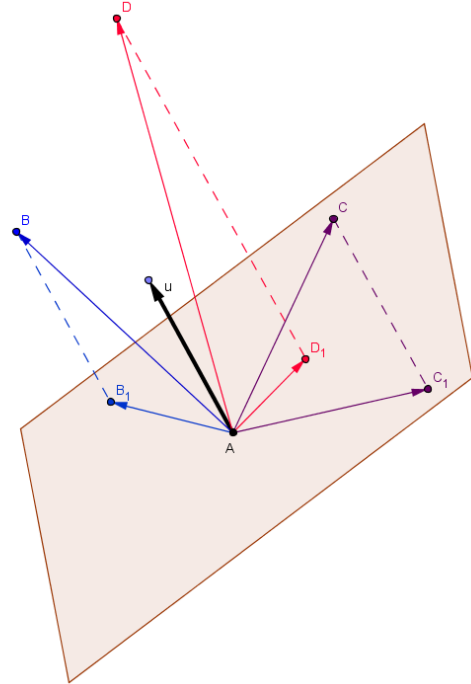
D'où en multipliant scalairement par $\vec{u}$

$$-\delta \|\vec{u}\|^2 = -\beta \|\vec{u}\|^2 - \gamma \|\vec{u}\|^2$$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, cette dernière égalité implique

$$\delta = \beta + \gamma \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$$

Et donc (*) devient $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$



pour $i=2$ il suffit de se placer dans le plan et de passer aux affixes des points dans un certain r.o.n.d. de ce plan

pour $i=3$ c'est immédiat. CQFD

On en déduit alors

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{AB_3} + \overrightarrow{AC_3} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

•

Proposition 4.3.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n.d.)

On rappelle que $\mathcal{B}$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{E}}$, on note $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ on a alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)_{\mathcal{B}}$$

♣

Remarque 4.3.4 On peut retrouver cette expression en notant

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} x-x' & y-y' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x-x' & y-y' \\ x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x-x' & y-y' \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)_{\mathcal{B}}$$

*

Preuve grâce à

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

On en déduit par antisymétrie et colinéarité.

•

4.3.2 Applications**Proposition 4.3.5 (Aire d'un parallélogramme)**

soient $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ deux vecteurs non nuls.

$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

♣

Preuve Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires c'est trivial. Sinon :

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et contenant $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ en mettant un indice $\vec{\mathcal{P}}$ à tout vecteur et opérateur vu dans $\vec{\mathcal{P}}$ on a

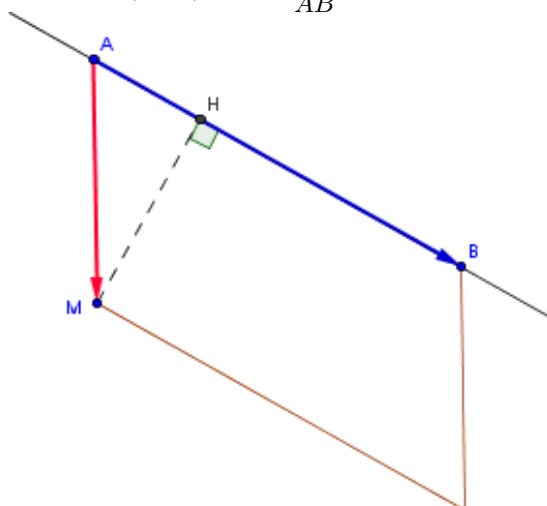
$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \left| \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) \right| = \left| \|\vec{AB}_{\vec{\mathcal{P}}}\| \|\vec{AC}_{\vec{\mathcal{P}}}\| \sin(\widehat{\vec{AB}_{\vec{\mathcal{P}}}, \vec{AC}_{\vec{\mathcal{P}}}}) \right| = |\text{Det}_{\vec{\mathcal{P}}}(\vec{AB}_{\vec{\mathcal{P}}}, \vec{AC}_{\vec{\mathcal{P}}})|$$

$\mathcal{P}$ étant orienté de façon quelconque

• On en déduit

Corollaire 4.3.6 Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et B . Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{AB}$$



♣

4.4 Déterminant ou Produit Mixte

4.4.1 Définitions et Propriétés

Définition 4.4.1 Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, on appelle déterminant de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel noté $Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et défini par

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

On note aussi cette quantité $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ on parle alors du produit mixte de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ♠

Proposition 4.4.1 Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

ils forment une base si et seulement si

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

♣

Démonstration première équivalence :

Si u et v colinéaires c'est trivial. si non

$$Det = 0 \iff (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \iff \vec{w} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

or $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ donc : les seuls $\vec{w}$ orthogonaux à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont CL de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (voir proposition plus haut)... CQFD •

Proposition 4.4.2 Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ b.o.n alors

$\mathcal{B}$ b.o.n.d. si et seulement si $Det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$ ♣

Proposition 4.4.3 l'application déterminant $Det : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est trilineaire et antisymétrique.

Trilineaire i.e. elle est linéaire relativement à chacune de ses trois composantes.

Par exemple

$$\begin{aligned} \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^4, \quad Det(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) &= Det(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + Det(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) \\ \forall (\lambda, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R} \times \vec{\mathcal{E}}^3, \quad Det(\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \lambda Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

antisymétrique i.e. que le déterminant de trois vecteurs change de signe lorsque l'on permute deux d'entre eux.

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3, \quad Det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = Det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = Det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

♣

Preuve Par linéarité du produit scalaire, antisymétrie du produit vectoriel puis symétrie du produit scalaire. •

Remarque 4.4.1 la permutation circulaire de trois vecteurs ne change pas la valeur du déterminant

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = Det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = Det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

*

Proposition 4.4.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n.d.)

On rappelle que $\mathcal{B}$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{E}}$, on note $\vec{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ on a alors

$$Det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3$$

On note aussi

$$Det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

♣

Preuve Grâce aux expressions du produit scalaire et du produit vectoriel dans b.o.n.d.

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \times z_3$$

•

Remarque 4.4.2 On peut retenir la formule dite de développement du déterminant par rapport à la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \times z_3$$

Et puisque le déterminant est invariant par permutation circulaire on a aussi le développement rapport à la première colonne

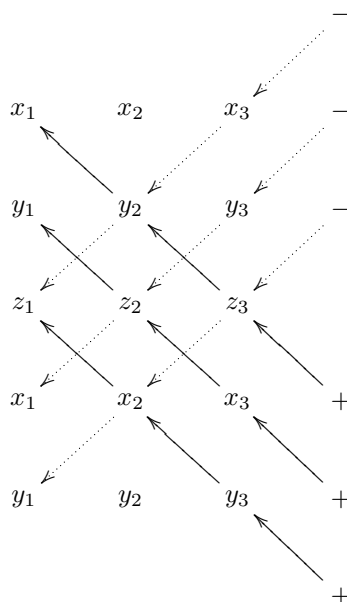
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \times \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

On pourrait également parler du développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_2 \times \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \times \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \times \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

*

Remarque 4.4.3 (Méthode de Sarrus) On recopie les deux premières lignes du tableau sous le tableau correspondant au déterminant cherché, puis on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe + ou - selon le schéma :



*

4.4.2 Applications

Proposition 4.4.5 (Interprétation Géométrique) Etant donnés trois vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ de l'espace, $|\text{Det}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$ est égal au volume du parallélépipède dont les côtés sont portés par $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AD}$



Preuve Si on note H projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$ l'aire du parallépipède $ABCDEF$ est égal à

$$\text{Aire}(ABCE) \cdot \overrightarrow{HD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{HD}\| = \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{HD}\| = |\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HD})|$$

$$\text{or } \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HD}) = \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + \underbrace{\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HA})}_{=0}$$

Corollaire 4.4.6 Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par deux vecteurs libres $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

♣

Preuve Première preuve : Si on note H projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ l'aire du parallépipède $ABCMDE$ est égal à

$$\text{Aire}(ABCD) \cdot MH = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot d(M, \mathcal{D})$$

•

Proposition 4.4.7 Soit A un point et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres. Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = k$ est un plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

♣

Preuve Soit M_0 sol particulière (par exemple prendre $\overrightarrow{AM_0} = \frac{k}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$).

$$M \in \Delta_k \iff \text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = \text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM_0}) \iff \text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) - \text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM_0}) = 0$$

D'où $M \in \Delta_k$ si et seulement si $\text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{M_0M}$ coplanaires.

•

4.5 Plans de l'espace

4.5.1 Equations

Dans toute cette section l'espace est rapporté à un r.o.n.d. $\mathcal{R}$. on note $\mathcal{B}$ la b.o.n.d. associée.

Proposition 4.5.1 (Equation paramétrique)

Ici $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ sont quelconques.

Soit $A(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)_{\mathcal{B}}, \overrightarrow{u_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

Une équation paramétrique dans $\mathcal{R}$ du plan $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$ est donnée par

$$\begin{cases} x &= a + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y &= b + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z &= c + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

♣

Exercice: Ecrire une équation paramétrique du plan passant par les points $A(3, 2, 2), B(5, -2, 1)$ et $C(7, 0, -1)$.

Preuve Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}$

$$M \in A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$$

D'où en passant aux coordonnées (x, y) de M on a

$$M \in A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad x - a = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad y - b = \lambda\beta$$

•

Proposition 4.5.2 (Equation cartésienne et vecteur normal) Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. alors il admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ (r.o.n.)

$$(*) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles.

Réciproquement toute équation de ce type est une équation de plan En particulier :

le vecteur $\vec{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$



Démonstration

• Soit $\mathcal{P}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ et passant par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ Soit $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace, on a :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

On reconnaît bien une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (car $\vec{n} \neq \vec{0}$) et $c = -ax_0 - by_0 - cz_0$

• Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble d'équation $(*)$. Posons $\vec{n}(a, b, c)_{\mathcal{R}}$.

$$M(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0 \iff \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = -d$$

(Où O est l'origine du repère).

On reconnaît là ligne de niveau correspondant à un plan de vecteur normal $\vec{n}$



Remarque: Une équation cartésienne du plan $M_0 + (\mathbb{R}\vec{n})^\perp$ relativement à un r.o.n. est donnée par

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

avec $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{n}(a, b, c)$

Proposition 4.5.3 Une équation cartésienne du plan $M_0 + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$ relativement à un r.o.n.d, est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

avec $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ ($i \in \{1, 2\}$)



Preuve Deux preuves

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{M_0M}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ coplanaires} \iff \text{Det}(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$$

$$M \in \mathcal{P} = M_0 + (\mathbb{R}\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)^\perp \iff \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \iff \text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_0M}) = 0$$



Exercice: Cette proposition est-elle vraie dans un repère quelconque ?

Exercice: Ecrire une équation cartésienne du plan passant par les points $A(3, 2, 2), B(5, -2, 1)$ et $C(7, 0, -1)$.

Corollaire 4.5.4 Soient A, B, C non alignés.

Une équation cartésienne du plan (ABC) relativement à un r.o.n.d $\mathcal{R}$, est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

avec $A(x_A, y_A, z_A)_{\mathcal{R}}, B(x_B, y_B, z_B)_{\mathcal{R}}$ et $C(x_C, y_C, z_C)_{\mathcal{R}}$



Proposition 4.5.5 Soient $a, a', b, b', c, c', d, d'$ huit réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

caractérisent une seule et même plan si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad a' = \lambda a \quad b' = \lambda b \quad c' = \lambda c \quad \text{et} \quad d' = \lambda d$$



Preuve Supposons que ces deux équations représentent la même droite $\mathcal{D}$ les vecteurs $\vec{n}(a, b, c)_B$ et $\vec{n}'(a', b', c')_B$ sont donc deux vecteurs directeurs (non nuls) de la même droite donc colinéaires :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \vec{n}' = \lambda \vec{n}$$

($\lambda \neq 0$ car $\vec{n}' \neq \vec{0}$) En soustrayant la deuxième équation à la première multipliée par λ il vient

$$d' - \lambda d = 0$$

D'où l'implication directe.

La réciproque étant triviale on a donc bien l'équivalence.



Exercice: Montrer que cette proposition reste vraie dans un repère quelconque.

Définition 4.5.1 (Equation Normale)

Tout plan admet une équation normale, il s'agit d'une équation du type

$$ax + by + cz = p \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles. Elles sont uniques au signe près.



Remarque 4.5.1 Supposons le repère est orthonormé.

une telle équation caractérise un plan de vecteur unitaire normal $\vec{n}(a, b, c)_B$ Plus précisément c'est la surface de niveau

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = p$$

Réciproquement Partant d'un plan de vecteur normal unitaire $\vec{n}$, on trouve l'équation normale

$$ax + by + cz = p \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

où p est la mesure algébrique $\overrightarrow{OH}$ orienté par $\vec{n}$ et H est le projeté orthogonale de O sur $\mathcal{P}$.



Remarque 4.5.2 On peut noter $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ où α, β, γ sont des mesures des écarts angulaires entre le vecteur $\vec{n}$ et les vecteurs de base d'une b.o.n.

L'équation normale devient

$$\cos \alpha x + \cos \beta y + \cos \gamma z = p$$



4.5.2 Plans remarquables

Définition 4.5.2 (Plans parallèles et orthogonaux) Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de normales respectives n et n' . On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si n et n' sont colinéaires.

On note $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$.

On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n}'$

On note $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.



Exercice: Montrer que ces définitions ne dépendent pas du choix des vecteurs normaux

Proposition 4.5.6

$A + (\mathbb{R} \vec{v})^\perp$ est parallèle à $A' + (\mathbb{R} \vec{v}')^\perp$ si et seulement si $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{0}$

$A + (\mathbb{R} \vec{v})^\perp$ est orthogonal à $A' + (\mathbb{R} \vec{v}')^\perp$ si et seulement si $(\vec{v} | \vec{v}') = 0$



Exercice: Caractériser à l'aide des coefficients de leurs équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$, le fait que deux plans sont parallèles ou orthogonaux

Proposition 4.5.7 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes dans un r.o.n.

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si (a, b, c) est proportionnel à (a', b', c')

Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, et l'on a $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u} := \vec{n} \wedge \vec{n}'$ avec $\vec{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{n}'(a', b', c')_{\mathcal{B}}$ ♣

Preuve $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires d'où la proportionnalité des triplets.

Dans le cas contraire. $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires, et $\vec{u} := \vec{n} \wedge \vec{n}'$ leurs est orthogonal non nul à tous les deux, d'où les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires à $\vec{u}$ (voir proposition...)

Supposons $M_0 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ on a

$$M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \iff \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}' \iff \overrightarrow{M_0M} \text{ colinéaire à } \vec{u}$$

CQFD.. A condition d'avoir trouvé une solution particulière M_0 . Cette solution existe car $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires donc on a par exemple

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Et donc le système

$$\begin{cases} ax + by = -d \\ a'x + b'y = -d' \end{cases}$$

admet un (unique) couple solution (X, Y) . Et donc le point $M_0(X, Y, 0)_{\mathcal{R}}$ convient •

4.5.3 Applications

Proposition 4.5.8 (Calcul de distances) Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ (r.o.n.)

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

et $M(X, Y, Z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|aX + bY + cZ + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

♣

Preuve Soit $n(a, b, c)$, s'agissant d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{P}$ on a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(X - x_A) + b(Y - y_A) + c(Z - z_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On conclut grâce au fait que $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ •

Corollaire 4.5.9 Soient M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan quelconques.

$$M \in \mathcal{P} \iff d(M, \mathcal{P}) = 0$$

♣

4.6 Droites de l'Espace

Comme dans le plan la caractérisation d'une droite par son vecteur directeur nous donne

4.6.1 Equations

Dans toute cette section l'espace est rapporté à un r.o.n.d. $\mathcal{R}$. on note $\mathcal{B}$ la b.o.n.d. associée.

Proposition 4.6.1 (Equation paramétrique)

Ici $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ sont quelconques.

Soit $A(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ un vecteur non nuls de l'espace. Une équation paramétrique dans $\mathcal{R}$ du plan $A + \mathbb{R}\vec{u}$ est donnée par

$$\begin{cases} x &= a + \lambda\alpha \\ y &= b + \lambda\beta \\ z &= c + \lambda\gamma \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

♣

Exercice: Ecrire une équation paramétrique de la droite passant par les points $A(3, 2, 2)$ et $B(5, -2, 1)$.

Preuve Soit $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}$

$$M \in A + \mathbb{R}\vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$$

D'où en passant aux coordonnées (x, y) de M on a

$$M \in A + \mathbb{R}\vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad x - a = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad y - b = \lambda\beta$$

•

Remarque 4.6.1 Lorsque ceci à un sens on peut réécrire cette équation paramétrique comme

$$\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}$$

*

Proposition 4.6.2 (Equation cartésienne et vecteur directeur) Toute droite de l'espace est l'intersection de deux plans de l'espace elle admet pour équation cartésienne dans un r.o.n.d.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$$

avec $\vec{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ $\vec{n}'(a', b', c')_{\mathcal{R}}$ non colinéaires.

Réciproquement tout système de ce type caractérise une droite.

En particulier $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est vecteur directeur de cette droite

♣

4.6.2 Droites Remarquables

Définition 4.6.1 Deux droites sont dites parallèles (resp. orthogonales) si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires (resp. orthogonaux)

Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite est inclus dans le plan

Si de plus cette droite et ce plan ont un point en commun on dira que la droite est incluse dans le plan.

♠

Exercice: Montrer que ces définitions ne dépendent pas du choix du vecteur directeur

Définition 4.6.2 Deux droites orthogonales et sécantes sont dites perpendiculaires.

♠

Proposition 4.6.3 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan d'équations dans un r.o.n.d.

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{cases} \quad \text{et} \quad a''x + b''y + c''z = d''$$

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécantes leur point d'intersection est le point $A(X, Y, Z)$

$$(*) \quad X = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

♣

Preuve Notons $n(a, b, c)$ $n'(a', b', c')$ et $n''(a'', b'', c'')$ on a $\mathcal{D}$ dirigé par $n \wedge n'$ et $\mathcal{P}$ de normale n'' d'où

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \iff n \wedge n' \in \vec{\mathcal{P}} \iff (n \wedge n') \cdot n'' = 0 \iff \text{Det}(n, n', n'') = 0$$

Pour le point d'intersection on a comme condition nécessaire, Si (X, Y, Z) convient alors

Faire

$$(L'_1) \leftarrow \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \times (L_1) - \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \times (L_2) + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \times (L_3)$$

On trouve pour cette première ligne (L'_1) , grâce à la formule de développement / à la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} c & b & c \\ c' & b' & c' \\ c'' & b'' & c'' \end{vmatrix} Z = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

d'où X , calcul similaire pour Y et Z .

Réciproquement on montre que ces coordonnées conviennent (à faire en exercice)

•

Corollaire 4.6.4 *Le système*

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

admet une unique triplet solution si et seulement si $\Delta \neq 0$ (Où Δ est le déterminant du système).

On dit dans ce cas qu'il s'agit d'un système de Cramer et l'unique solution (X, Y, Z) est donnée par (*)

♣

Corollaire 4.6.5 Soient $\vec{u}_i(a_i, b_i, c_i)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) trois vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont relatives à un repère quelconque.

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \text{ coplanaires si et seulement si } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

♣

Preuve Le système

$$(S_0) \quad \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0 \end{cases}$$

admet au moins un triplet solution $(0, 0, 0)$. D'où

$(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ coplanaires si et seulement si il existe un triplet $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = 0$

si et seulement si (S_0) admet au moins deux solutions

si et seulement si (S_0) n'est pas de Cramer

si et seulement si $\text{Det}(S_0) = 0$

•

Proposition 4.6.6 *Le plan $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$ (avec $\vec{u}_i(a_i, b_i, c_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$) admet pour équation cartésienne dans un repère quelconque*

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est du type

$$(*) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Réciproquement toute équation du type $(*)$ relativement à un repère quelconque est celle d'un plan ♣

Preuve Soit $M(X, Y, Z)$ un point de l'espace.

• Si on pose $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$, on a d'après ce qui précède

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ coplanaires} \iff \begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bien évidemment ceci est de la forme $(*)$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

(voir déterminants extraits ou supposez par l'absurde $(a, b, c) = (0, 0, 0)$)

• Si on pose $\mathcal{P}$ d'équation $(*)$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On peut trouver une solution particulière (x_A, y_A, z_A) (exercice) et on peut écrire a, b, c sous la forme

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad b = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(indication considérer la base orthogonale $(\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ construite à partir de $\vec{n} \neq \vec{0}$)

On a alors par développement par rapport à la première colonne

$$M \in \mathcal{P} \iff \begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

•

Remarque 4.6.2 Grâce à ce dernier corollaire, on voit qu'il en va de même pour le système d'équations cartésiennes associé à une droite dans un repère quelconque *

Proposition 4.6.7 (Perpendiculaire commune)

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles de l'espace.

Il existe une et une seule droite Δ qui soit simultanément perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

Cette droite porte le nom de *perpendiculaire commune* à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$, elle est dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ où $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ♣

Démonstration Posons $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathcal{D}' = A' + \mathbb{R}\vec{u}'$ et $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$.

Soient $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{n}$ et $\mathcal{P}' = A' + \mathbb{R}\vec{u}' + \mathbb{R}\vec{n}$ il s'agit bien de deux plans puisque $(\vec{u}, \vec{n})$ libre et $(\vec{u}', \vec{n})$ libre.

• Existence

Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ non parallèles. si par l'absurde oui alors il existe un vecteur $\vec{w}$ normal aux deux plans et en particulier $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{u}'$ et donc $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{n}$... Comme il est non nul c'est absurde car $\vec{w} \perp \vec{n}$

Posons alors $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ On a bien Δ dirigé par $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ car $\vec{u}'$ normale à $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ normale à $\mathcal{P}'$. et donc Δ orthogonal à $\mathcal{D}$ car $\vec{n} \perp \vec{u}$ de même Δ orthogonal à $\mathcal{D}'$.

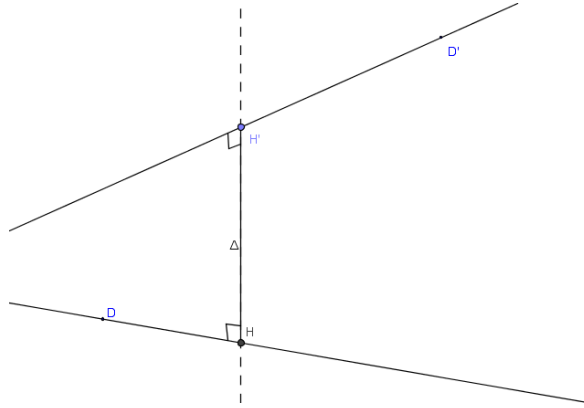
Enfin Δ et $\mathcal{D}$ étant coplanaires et non parallèles (car orthogonales), elles sont sécantes. De même pour Δ et $\mathcal{D}'$

• **Unicité.**

Soit Δ' une perpendiculaire commune autre que Δ . Puisque qu'un vecteur directeur de Δ' est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ on en déduit qu'il est colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{n}$. Donc Δ' est parallèle à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$. Or ces deux plans ont $\Delta' \cap \mathcal{D}$ et $\Delta' \cap \mathcal{D}'$ en commun avec Δ' . D'où

$$\Delta' \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$$

D'où l'égalité et la contradiction. •



Remarque 4.6.3 en notant H et H' l'intersection de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ on dit que HH' est la distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On note

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \stackrel{\text{def}}{=} HH'$$

H et H' sont les seuls points qui réalisent le minimum de $d(M, M')$ lorsque M parcourt $\mathcal{D}$ et M' parcourt $\mathcal{D}'$ *

Exercice: le prouver.

4.7 Sphères de l'espace

4.7.1 Equations

Définition 4.7.1 On appelle sphère de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ et de rayon R avec $R \geq 0$ l'ensemble de points M tel que

$$\Omega M = R$$

On note $S(\Omega, R)$ un tel ensemble.

Deux points symétriques par rapport au centre Ω sont dit diamétralement opposés.

On note $S(A, B)$ la sphère de diamètre $[AB]$ ♠

Proposition 4.7.1 (Equation Cartésienne) Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé.

Toute sphère admet pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où les constantes réelles sont telles que $d \leq a^2 + b^2 + c^2$

Réciproquement toute équation de ce type caractérise une sphère.

Plus précisément il s'agit de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ ♣

Preuve

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$$

avec $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. D'où, dans un r.o.n.

$$M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

4.7.2 Intersections, Droites et Plans remarquables

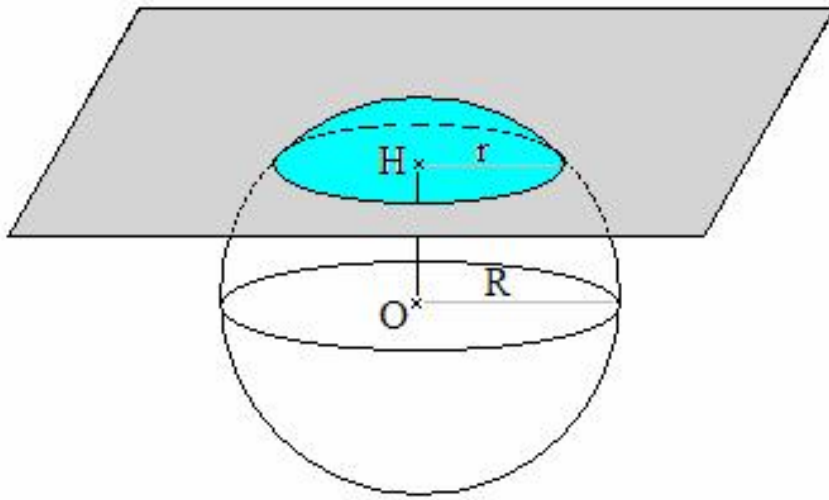
Proposition 4.7.2 (Intersection Plan Sphère)

Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ une sphère avec $R > 0$.

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{P}) > R &\iff \mathcal{P} \cap \mathcal{S} \text{ est vide} \\ d(\Omega, \mathcal{P}) = R &\iff \mathcal{P} \cap \mathcal{S} \text{ est réduit à un point} \\ d(\Omega, \mathcal{P}) < R &\iff \mathcal{P} \cap \mathcal{S} \text{ est un cercle} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
 Dans le troisième cas il s'agit du cercle du plan $\mathcal{P}$ $C(H, \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \mathcal{P})})$

♣



Preuve Si $\Omega \in \mathcal{P}$, il est clair que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est cercle du plan $\mathcal{P}$ $C(\Omega, R)$. Sinon :

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.

Notons $d = \Omega H = d(\Omega, \mathcal{P})$ et $\mathcal{R} = (\Omega, \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{d}, \dots)$ un r.o.n. (direct tant qu'à faire.).

Relativement à $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ admettent pour équations respectives

$$x = d \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

D'où

$$M(X, Y, Z) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \iff (X = d \quad \text{et} \quad Y^2 + Z^2 = R^2 - d^2)$$

Deuxième preuve : Par pythagore pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a $\Omega M^2 = \Omega H^2 + MH^2$

$$M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P} \iff (MH^2 = R^2 - d^2(\Omega, \mathcal{P}) \quad \text{et} \quad M \in \mathcal{P})$$

•

Définition 4.7.2 (Plan tangent)

Avec les notations ci-dessus, on dit que $\mathcal{P}$ est tangente à $\mathcal{S}$ en A lorsque $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{A\}$.

la tangente en A à la sphère $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ est le plan $\mathcal{P} = A + (\mathbb{R}\overrightarrow{\Omega A})^\perp$

♠

Proposition 4.7.3 Si dans un r.o.n. la sphère $\mathcal{S}$ admet pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Alors le plan tangent en $A(x_A, y_A, z_A)$ admet pour équation

$$xx_A + yy_A + zz_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) - c(z + z_A) + d = 0$$

♣

Preuve Soit $M(X, Y, Z)$. On a

$$M \in \mathcal{P} \iff (X - x_A)(x_A - a) + (Y - y_A)(y_A - b) + (Z - y_A)(z_A - c) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$Xx_A + Yy_A + Zz_A - aX - bY - cZ + ax_A + by_A + cz_A - \underbrace{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2)}_{2ax_A + 2by_A + 2cz_A - d} = 0$$

•

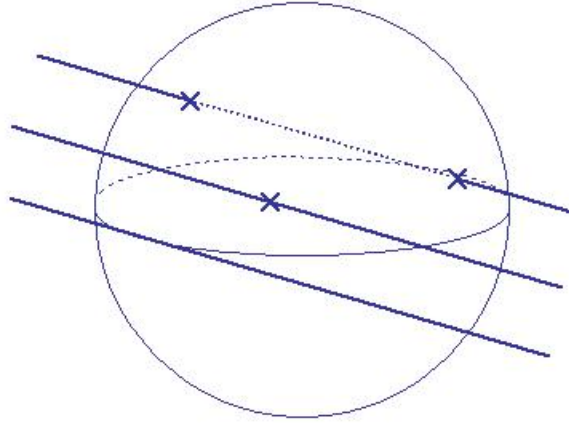
Proposition 4.7.4 (Intersection droite sphère)

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ une sphère avec $R > 0$.

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{D}) > R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \text{ est vide} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) = R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \text{ est réduit à un point} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) < R &\iff \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \text{ est constitué de deux points distincts} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.
Dans le troisième cas les deux points sont distants de H de $\sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \mathcal{D})}$

♣



Preuve Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par Ω et contenant $\mathcal{D}$

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \iff M \in \mathcal{D} \cap (\mathcal{P} \cap \mathcal{S})$$

Or $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle du plan $\mathcal{P}$ $C(\Omega, R)$.

On est donc ramené à une intersection droite cercle dans le plan $\mathcal{P}$, sachant que

$$d_{\mathcal{E}}(\Omega, \mathcal{D}) = d_{\mathcal{P}}(\Omega, \mathcal{D})$$

et que le projet H vu comme projeté de l'espace coïncide avec celui vu dans $\mathcal{P}$

•

Définition 4.7.3 On dit que $\mathcal{D}$ est tangent à $\mathcal{S}$ lorsque leurs intersections est réduite à un point A .

Dans ce cas $\mathcal{D}$ est inclus dans le plan tangent à A , et toutes les droites de ce plan passant par A sont tangentes à $\mathcal{S}$

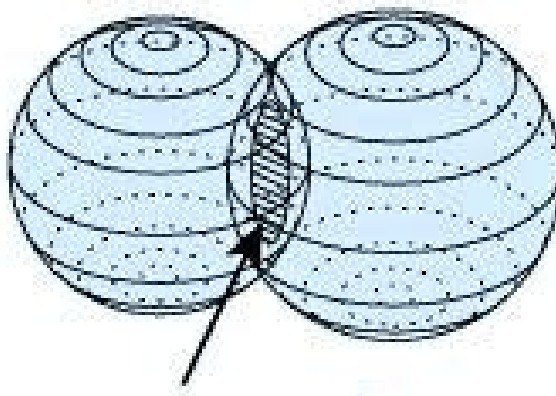
♠

Proposition 4.7.5 (Intersection de deux sphères)

Soient $\mathcal{S}_1 = S(\Omega_1, R_1)$ et $\mathcal{S}_2 = S(\Omega_2, R_2)$ deux sphères non concentriques. Notons $d = \Omega_1\Omega_2$

$$\begin{aligned} |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2 &\iff \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \text{ est un cercle} \\ d = |R_1 - R_2| \text{ ou } d = R_1 + R_2 &\iff \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \text{ est réduit à un point} \\ d < |R_1 - R_2| \text{ ou } d > R_1 + R_2 &\iff \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \text{ est vide} \end{aligned}$$

♣



Preuve dans le r.o.n. (d tant qu'à faire) $\mathcal{R} = (\Omega_1, \frac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{d}, \dots)$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2dx + d^2 = R_2^2$$

Donc

$$M(X, Y) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \iff (X^2 + Y^2 + Z^2 = R_1^2 \quad \text{et} \quad -2dX + d^2 = R_2^2 - R_1^2) \iff M \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est le plan d'équation

$$X = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}$$

en particulier

$$d(\Omega_1, \mathcal{P}) = \frac{|R_1^2 - R_2^2 + d^2|}{2d}$$

D'où la conclusion grâce à (voir calculs dans le cas du plan)

$$d(\Omega_1, \mathcal{P}) > R_1 \iff d < |R_1 - R_2| \quad \text{ou} \quad d > R_1 + R_2$$

$$d(\Omega_1, \mathcal{P}) = R_1 \iff d = |R_1 - R_2| \quad \text{ou} \quad d = R_1 + R_2$$

$$d(\Omega_1, \mathcal{P}) < R_1 \iff |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$$

•