Chapitre 4

Géométrie élémentaire de l'espace

Notons $\mathcal{E}$ l'espace affine (ensemble des points de l'espace)et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé(ensemble des vecteurs de l'espace).
Comme pour le plan, on peut munir $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ d'une loi de composition interne + (somme de vecteurs).
On peut également lui adjoindre une loi de composition externe $\cdot$ (multiplication d'un vecteur par un scalaire réel).
Ces lois confèrent à $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4.1 Modes de Repérage dans l'espace

4.1.1 Coordonnées Cartésiennes

Définition 4.1.1 (système libre)
On dit les système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de trois vecteurs est libre lorsqu'ils sont non coplanaires.
Cela implique en particulier que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont tous les trois non nuls et distincts.
on a la caractérisation suivante :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \textit{ libre} \quad \textit{si et seulement si} \quad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \left[a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0 \Longrightarrow (a,b,c) = (0,0,0)\right]$$

lorsque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas un système libre, on dit que le système est lié.
$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$ est ce qu'on appelle une <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ à l'aide des coefficients a, b et c. ♠

Preuve .... •

Exercice: écrire la caractérisation d'un système de trois vecteurs liés.

Définition 4.1.2 (Repère et coordonnées cartésiennes)
Soient Ω un point de l'espace $\mathcal{E}$, et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un système libre.
On dit alors que $\mathcal{R} := (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ (resp. $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$)est un repère de $\mathcal{E}$ (resp. une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$).
Ω est l'origine du repère $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont respectivement le premier, deuxième et le troisième vecteur de base.
Tout point M (resp. tout vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$) admet une écriture unique de la forme :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

On dit que $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel de dimension 3.

(x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ (resp. du point M) dans le repère $\mathcal{R}$ (resp. la base $\mathcal{B}$). ♠

Preuve .... •

Exemple: En notant $O = (0,0,0)$, $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ on voit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère de $\mathbb{R}^3$. Ce repère porte le nom de repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4.1.1 *La donnée d'une base $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ permet d'identifier $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ à $\mathbb{R}^3$ au moyen de l'application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{\mathbb{R}^3} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \end{array}$$

Cette application est bijective (surjective et injective) et $\mathbb{R}$-linéaire.
On dit qu'elle réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ ♣

La preuve est identique à celle concernant $\varphi_{\mathbb{R}^2}$

Remarque 4.1.1 *Ces identifications dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$.*
Avec les notations ci-dessus :
$\varphi_{\mathbb{R}^3}((x,y,z))$ désigne le vecteur $\overrightarrow{u}$ coordonnées (x,y,z) relativement au repère $\mathcal{B}$, on note $\overrightarrow{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$.
∗

Remarque 4.1.2 *Ces identifications (relatives à une base $\mathcal{B}$) nous permettent de voir l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^3$ avec compatibilité des lois vectorielles :*
la somme de deux vecteurs correspond à la somme des triplets de coordonnées relatives à $\mathcal{B}$.
Le produit d'un vecteur par un scalaires correspond au produit du triplet des coordonnées relatives à $\mathcal{B}$ par un réel. ∗

Exercice: Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Montrer que $\overrightarrow{u_1}(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_2}(x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{B}}$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 4.1.3 *Tout comme à $\mathcal{P}$ on peut adjoindre à $\mathcal{E}$ une structure affine (relativement à un point choisi dans $\mathcal{E}$). Ceci nous permet alors de dire que pour $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, un repère fixé, $\mathcal{E}$ s'identifie comme espace affine à $\mathbb{R}^3$ au moyen de l'isomorphismes d'espace affines*

$$\begin{array}{cccc} \Psi_{\mathbb{R}^3} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & (x,y,z) & \mapsto & \Omega + (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}) \end{array}$$

Où la notation $\Omega + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique point M tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{u}$.
Cette identification dépend du choix du repère $\mathcal{R}$.
Avec les notations ci-dessus :
$\Psi_{R^3}((x,y,z))$ désigne le point de M coordonnées (x,y,z) relativement au repère $\mathcal{R}$, on note $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$.
∗

Définition 4.1.3 (Caractérisation d'un plan)
Tout plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par la donné d'un point A et de deux vecteurs libres $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. On note $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$.

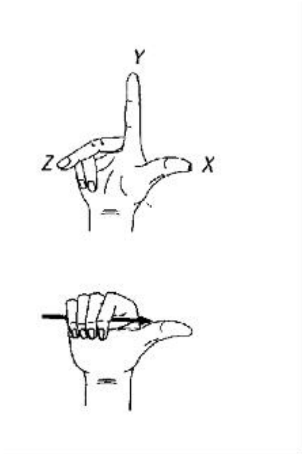
$$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{u_1} \text{ et } \overrightarrow{u_2} \text{ sont coplanaires} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{est combinaison linéaire de } \overrightarrow{u_1} \text{ et } \overrightarrow{u_2}$$

On dit que $\mathbb{R}\overrightarrow{u_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$ est le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$, on le note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (c'est l'ensemble de vecteurs admettant un représentant dans $\mathcal{P}$) ♠

Définition 4.1.4 (Vecteurs Orthogonaux)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel qui les contient.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (vus dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) le sont. On note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ ♠

Définition 4.1.5 (plan et angles orientés)
Soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel défini à l'aide de deux vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur (non nul) orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On dira que $\overrightarrow{n}$ oriente $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ lorsque l'on choisi d'orienter $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de façon dextrogyre par rapport $\overrightarrow{n}$:

i.e $\boxed{\text{lorsque l'on visse dans le sens positif on avance dans le sens de } \overrightarrow{n}}$



Toute mesure d'angle orientée de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (vus dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ainsi orienté) sera dite mesure d'angle orienté par $\overrightarrow{n}$.
En particulier si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont dans le sens direct, on dira que $\overrightarrow{n}$ est directement orthogonal à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. ♠

Remarque 4.1.4 *Il n'existe pas de notion d'angle orienté de deux vecteurs vus dans l'espace. Celle-ci est toujours liée à un choix arbitraire d'orientation d'un plan les contenant. En revanche on peut toujours parler d'écart angulaire non orienté de vecteurs vus dans l'espace.* ∗

Définition 4.1.6 *Soit $\mathcal{R}$ un repère (resp. $\mathcal{B}$).*
On dit que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un repère (resp. une base) orthogonal(e), lorsque les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.
On dit que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un repère (resp. une base) orthonormal(e), lorsque les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et normés (de norme 1).
Si de plus le troisième vecteur de base est directement orthogonal aux deux premiers (pris dans l'ordre), on dira qu'il s'agit d'un repère (resp. base) orthonormal(e) direct(e). ♠

Exemple: $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal direct de $\mathbb{R}^3$.

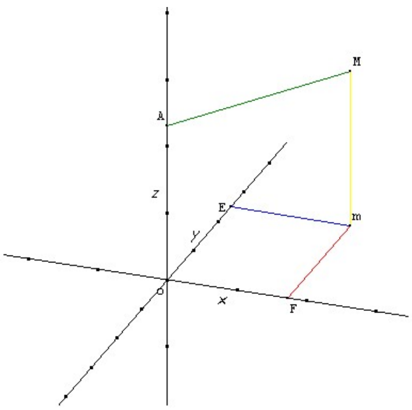
4.1.2 Coordonnées Cylindriques et Sphériques

Dans toute la suite $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ désigne un r.o.n. de $\mathcal{E}$

Définition 4.1.7 (Coordonnées Cartésiennes)
soit M (resp. $\overrightarrow{OM}$) un point (resp. un vecteur) de l'espace. On dit qu'il a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) relativement à $\mathcal{R}$, lorsque

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

x, y, z sont respectivement appelés abscisse, ordonnée et cote de M (resp. $\overrightarrow{OM}$) ♠



Dans le plan $\mathcal{P}$ passant par O engendré par les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et orienté par $\overrightarrow{k}$, on note $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{v_\theta}$ les vecteurs de base du repère polaire associé à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (r.o.n.d. de $\mathcal{P}$).

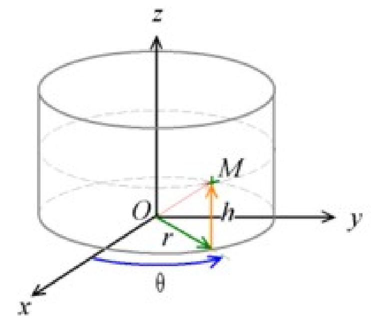
$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v_\theta} = -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$$

Pour tout point $M(x, y, z)$ on dit que $m(x, y, 0)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Définition 4.1.8 (Coordonnées Cylindriques)
Soit M (resp. $\overrightarrow{OM}$) un point (resp. un vecteur) de l'espace.
On dit qu'il a pour coordonnées cylindriques (r, θ, h) relativement à $\mathcal{R}$, lorsque

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\theta} + h\overrightarrow{k}$$

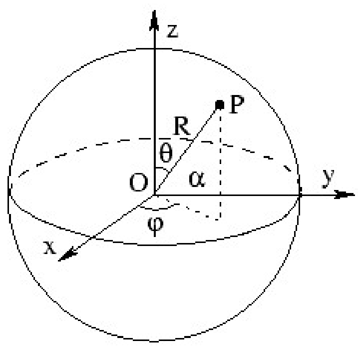
h est la cote de M (resp $\overrightarrow{OM}$)
(r, θ) est un couple de coordonnées polaires de m projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ (vu dans $\mathcal{P}$) ♠



Proposition 4.1.2 (Changement de Coordonnées) *Soit M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et de coordonnées cylindriques (r, θ, h) relativement à $\mathcal{R}$. On a alors*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & h \end{array}\right.$$

♣



Définition 4.1.9 (Coordonnées Sphériques)
soit M (resp. $\overrightarrow{OM}$) un point (resp. un vecteur) de l'espace. on dit qu'il a pour coordonnées sphériques (R, θ, φ) relativement à $\mathcal{R}$, lorsque $R \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ vérifient

$$\overrightarrow{OM} = R\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi} + R\cos\theta\overrightarrow{k}$$

R est la norme de $\overrightarrow{OM}$
θ est la colatitude de M, c'est une mesure de l'écart angulaire non orienté $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM})$
φ est la longitude (ou azimuth) de M, c'est une mesure de l'angle polaire de m projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ (vu dans $\mathcal{P}$) ♠

Remarque 4.1.5 *Dans le plan $\mathcal{P}'$ passant par O engendré par $\overrightarrow{u_\varphi}$ et $\overrightarrow{k}$, le point M (vu dans $\mathcal{P}$) admet (R, θ) pour coordonnées polaires relativement à l'axe polaire $(O, \overrightarrow{k})$.*
l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ s'appelle la latitude de M $*$

Proposition 4.1.3 (Changement de Coordonnées) *Soit M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et de coordonnées sphériques (R, θ, φ) relativement à $\mathcal{R}$. On a alors*

$$\begin{cases} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{cases}$$

♣

Définition 4.1.10 (Equation cartésienne)
Soit Γ un ensemble de points de l'espace, et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{E}$ est une fonction donnée On dit que

$$f(x, y, z) = 0$$

est une équation cartésienne de Γ relativement au repère $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, lorsque :
Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient

$$f(x, y, z) = 0$$

On a

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{E} | \quad \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad \overrightarrow{\Omega M} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = 0\}$$

♠

Définition 4.1.11 (Equations paramètrées)
Soit Γ un ensemble de points de l'espace, et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions réelles. On dit que

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \qquad\qquad t \in \Lambda \\ z = h(t) \end{cases}$$

est une équation paramètrée de Γ relativement au repère $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, lorsque :
Γ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) relativement au repère $\mathcal{R}$ vérifient

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{et} \quad z = h(t) \qquad \text{avec } t \in \Lambda$$

Λ désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (ou $\mathcal{R}^2$), Dans la pratique il s'agira souvent d'un intervalle (ou produit d'intervalles).

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{E} | \quad \exists t \in \mathbb{R}; \quad \overrightarrow{\Omega M} = f(t)\overrightarrow{e_1} + g(t)\overrightarrow{e_2} + h(t)\overrightarrow{e_3}\}$$

♠

On définit de même les équations cylindriques et sphériques d'un ensemble de points de l'espace donné.

4.2 Produit Scalaire

4.2.1 Définitions et Propriétés

Etant donné que deux vecteurs peuvent toujours être vus dans un plan le contenant on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace comme celui de ces mêmes vecteurs vu dans un plan. Cette définition est indépendante du choix du plan choisi. Plus précisément on a

Définition 4.2.1 (Géométrique) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est défini par*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta && \textbf{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ non nuls} \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= 0 && \textbf{sinon} \end{aligned}$$

Où θ est une mesure (non orientée) de l'écart angulaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Pour éviter toute confusion avec la loi de composition externe, on note aussi $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ ou $<\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}>$ pour désigner le produit scalaire. ♠

ainsi le produit scalaire dans l'espace vérifie les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan. A savoir :

Proposition 4.2.1 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$* ♣

Proposition 4.2.2 *l'application produit scalaire $(\cdot|\cdot) : \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et symétrique.* ♣

Corollaire 4.2.3 *soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$*

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) &= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right) \\
2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2) &= \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2
\end{aligned}$$

♣

En effet pour se convaincre de la véracité des propositions ci-dessus, il suffit de constater que les notions de somme, différence, multiplication par un scalaire, produit scalaire, norme, écart angulaire non orienté et orthogonalité de deux vecteurs de l'espace coïncident avec celles de somme, différence, multiplication par un scalaire, produit scalaire, norme, mesure d'angle non orienté et orthogonalité de ces deux mêmes vecteurs vus dans un plan les contenant.

On retrouve alors les propriétés similaires suivantes.

Proposition 4.2.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n) *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on note $\overrightarrow{u}(x,y,z)_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')_{\mathcal{B}}$ on a alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

♣

Preuve .... •

Corollaire 4.2.5 *Les coordonnées (x,y,z) d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ relativement à une b.o.n. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, sont données par*

$$x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_1} \qquad y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_2} \qquad \text{et} \qquad z = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_3}$$

♣

Corollaire 4.2.6 *Soit $\mathcal{R}$ un r.o.n. Si $A(x_A, y_A, z_A)_{\mathcal{R}}$ et $B(x_B, y_B, z_B)_{\mathcal{R}}$, alors*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

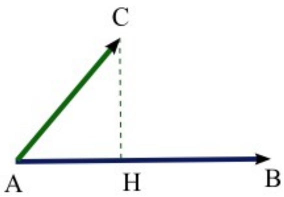
♣

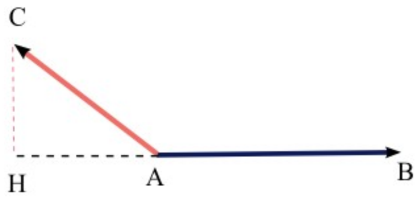
Exercice: Démontrer le théorème de Pythagore :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

4.2.2 Projection orthogonale et vecteur normal

les notions de mesure algébrique sur une droite orientée, et de projeté orthogonal sur un droite (ainsi que sa caractérisation en terme de distance) restant en tout point identique à celles décrites dans le plan on a





Proposition 4.2.7 (Interprétation en terme de projection) *Soient A, B, C trois points de l'espace. et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors*

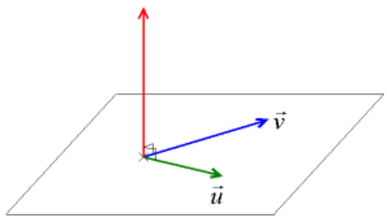
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

où $\overline{AH}$ est la mesure algébrique relativement à la droite (AB) orientée par $\overrightarrow{AB}$ ♣

Définition 4.2.2 (Normale à un plan) *Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A et dont deux vecteurs libres sont donnés par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On dit que $\overrightarrow{n}$ (vecteur non nul) est normal au plan $\mathcal{P}$ (ou encore que $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$) lorsque*

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$$

Cette définition est indépendante du choix de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Plus précisément :
Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ on a $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{n}$ ♠



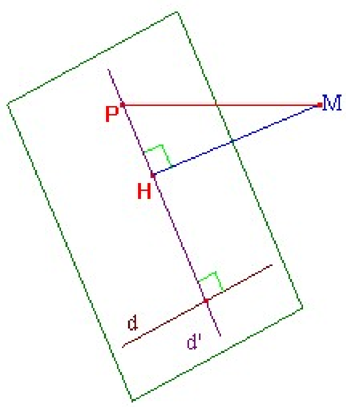
Preuve ...... •

Corollaire 4.2.8 *Une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan* ♣

Définition 4.2.3 *Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A et dont deux vecteurs libres sont donnés par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est l'unique point H vérifiant*

$$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u} \qquad \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{v} \qquad \text{et} \qquad H \in \mathcal{P}$$

H est l'unique point qui minimise la fonction $P \mapsto d(M, P)$ lorsque P parcourt $\mathcal{P}$,
on dit que $d(M, \mathcal{P}) \overset{def}{=} MH$ est la distance de M à $\mathcal{P}$. ♠



Preuve ...... •

Remarque 4.2.1 *En reprenant les notations de la proposition on a* $\mathcal{P} \cap (M + \mathbb{R}\overrightarrow{n}) = \{H\}$ ∗

Proposition 4.2.9 *Soient* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$ *deux vecteurs non colinéaires.*

1. *Il existe un vecteur non nul* $\overrightarrow{w_0}$ *orthogonal à* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$
2. *les vecteurs orthogonaux à* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$ *sont les vecteurs* $\lambda\overrightarrow{w_0}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. *les vecteurs orthogonaux à* $\overrightarrow{w_0}$ *sont les combinaisons linéaires de* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$

♣

Preuve ... •

Corollaire 4.2.10
Tout plan admet un vecteur normal $\overrightarrow{n}$*, et tout autre vecteur normal est colinéaire à celui-ci.*
Réciproquement si $\overrightarrow{n}$ *est un vecteur non nul et* A *un point de l'espace, il existe un et un seul plan passant par* A *et de vecteur normal* $\overrightarrow{n}$*. On le note* $A + (\mathbb{R}\overrightarrow{n})^\perp$

$$M \in A + (\mathbb{R}\overrightarrow{n})^\perp \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$

♣

Preuve .... •

Remarque 4.2.2 *Tout plan admet exactement deux vecteurs unitaires normaux* $\overrightarrow{n}$ *et* $-\overrightarrow{n}$*. Ces deux vecteurs donnent les deux orientations possibles du plan.* ∗

Proposition 4.2.11 *Soit* A *un point et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur (non nul) Pour tout réel* k *l'ensemble* Δ_k *des points* $M \in \mathcal{E}$ *tels que* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ *est un plan dont* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur normal* ♣

Preuve .... •

Proposition 4.2.12 *Soit* $\mathcal{P}$ *la plan passant par* A *et de normale* $\overrightarrow{n}$*. Pour tout point* $M \in \mathcal{E}$*,on a*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

♣

Preuve .... •

4.2.3 Bases orthonormées

Proposition 4.2.13 *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *normé peut être complété en un base orthonormé de l'espace même en une b.o.n.d de l'espace.*
Il en va de même lorsque l'on se donne un point et un vecteur qui peuvent être complétés en un r.o.n. voire r.o.n.d. d'origine et de premier vecteur... ♣

Preuve .... •

Proposition 4.2.14 (Changement de Base)
Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *et* $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ *deux b.o.n. de l'espace.*
On note

$$\overrightarrow{e_1}'(a_1, b_1, c_1)_\mathcal{B} \qquad \overrightarrow{e_2}'(a_2, b_2, c_2)_\mathcal{B} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_3}'(a_3, b_3, c_3)_\mathcal{B}$$

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)_\mathcal{B}$ *et* $\overrightarrow{u}(x', y', z')_{\mathcal{B}'}$*, alors*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a_1x' + a_2y' + a_3z' \\ y &=& b_1x' + b_2y' + b_3z' \\ z &=& c_1x' + c_2y' + c_3z' \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& a_1x + b_1y + c_1z \\ y' &=& a_2x + b_2y + c_2z \\ z' &=& a_3x + b_3y + c_3z \end{array}\right.$$

♣

Preuve ...... •

Remarque 4.2.3 *le système exprimant le passage des nouvelles aux anciennes coordonnées reste valable pour des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ quelconques.* $*$

Remarque 4.2.4 *Comme pour le plan, le passage de l'ancienne à la nouvelle base se fait de façon contravariante par rapport au passage des anciennes aux nouvelles coordonnées.*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{e_1}' & = & a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2}' & = & a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3}' & = & a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3} \end{array}\right. \qquad \textit{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a_1x'+a_2y'+a_3z' \\ y & = & b_1x'+b_2y'+b_3z' \\ z & = & c_1x'+c_2y'+c_3z' \end{array}\right.$$

$*$

Corollaire 4.2.15 (Changement de repères orthonormés)
Soient $\mathcal{R}=(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{R}'=(\Omega',\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}',\overrightarrow{e_3}')$ deux b.o.n. de l'espace.
On note

$$\overrightarrow{e_i}'(a_i,b_i,c_i)_{\mathcal{B}} \qquad \textit{et} \qquad \Omega'(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{R}}$$

Soit $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ et $M(x',y',z')_{\mathcal{R}'}$, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha+a_1x'+a_2y'+a_3z' \\ y & = & \beta+b_1x'+b_2y'+b_3z' \\ z & = & \gamma+c_1x'+c_2y'+c_3z' \end{array}\right. \qquad \textit{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a_1(x-\alpha)+b_1(y-\beta)+c_1(z-\gamma) \\ y' & = & a_2(x-\alpha)+b_2(y-\beta)+c_2(z-\gamma) \\ z' & = & a_3(x-\alpha)+b_3(y-\beta)+c_3(z-\gamma) \end{array}\right.$$

♣

4.3 Produit Vectoriel

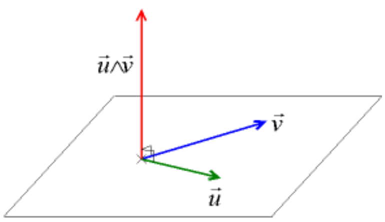
Dans toute cette section l'espace est rapporté au r.o.n.d. $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$

4.3.1 Définitions et Propriétés

Définition 4.3.1 (Géométrique) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur noté $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ et défini par*

$$\begin{array}{lcll} \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} & = & \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\sin\theta\,\overrightarrow{n} & \qquad \textbf{Si } \overrightarrow{u} \textit{ et } \overrightarrow{v} \textit{ non colinéaires} \\ \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} & = & 0 & \qquad \textbf{sinon} \end{array}$$

Dans le cas non colinéaire :
Notons $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ directement orthogonal à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ orienté par $\overrightarrow{n}$. ♠



Remarque 4.3.1 *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont indépendants, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est le vecteur directement orthogonal à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et de norme $\left|\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right|$.*
On peut s'aider de la règle des trois doigts.

$*$

Remarque 4.3.2 *la proposition caractérisant les vecteurs orthogonaux à deux vecteurs indépendants nous donne :*
Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non colinéaires.

1. $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ *orthogonal à* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$
2. *les vecteurs orthogonaux à* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$ *sont les vecteurs* $\lambda\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. *les vecteurs orthogonaux à* $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ *sont les combinaisons linéaires (CL) de* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$

$*$

Exercice: Montrer que

$$|u \cdot v|^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2$$

Proposition 4.3.1 *Deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ♣

Proposition 4.3.2 *une b.o.n.* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est directe si et seulement si* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
En particulier, si $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont normés et orthogonaux alors* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ *est une b.o.n.d.* ♣

Remarque 4.3.3 *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *deux vecteurs, supposons* $\overrightarrow{u}$ *non nul et soit* $\mathcal{P} = A + (\mathbb{R}\overrightarrow{u})^\perp$ *et orienté par* $\overrightarrow{u}$.

On note $\Pi_{\overrightarrow{u}}$ *la projection orthogonale sur le plan* $\mathcal{P}$, $Rot_{\overrightarrow{u}}$ *la rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *et de centre* A *dans* $\mathcal{P}$ *et* $Hom_{\overrightarrow{u}}$ *l'homothétie de centre* A *et de rapport* $\|u\|$

Alors si on note B_1, B_2, B_3 *les images successives*

$$B_1 = \Pi_{\overrightarrow{u}}(B) \qquad B_2 = Rot_{\overrightarrow{u}}(B_1) \qquad et \qquad B_3 = Hom_{\overrightarrow{u}}(B_2)$$

On a

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_3}$$

$*$

Proposition 4.3.3 *l'application produit vectoriel* $\cdot \wedge \cdot : \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *est bilinéaire et anti-symétrique.* ♣

Preuve .... •

Proposition 4.3.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n.d.) *On rappelle que* $\mathcal{B}$ *est une b.o.n.d. de* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, *on note* $\overrightarrow{u}(x, y, z)_\mathcal{B}$ *et* $\overrightarrow{v}(x', y', z')_\mathcal{B}$ *on a alors*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \quad \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)_\mathcal{B}$$

♣

Remarque 4.3.4 *On peut retrouver cette expression en notant*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \quad \left(\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix} \right)_\mathcal{B}$$

$*$

Preuve .... •

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

4.3.2 Applications

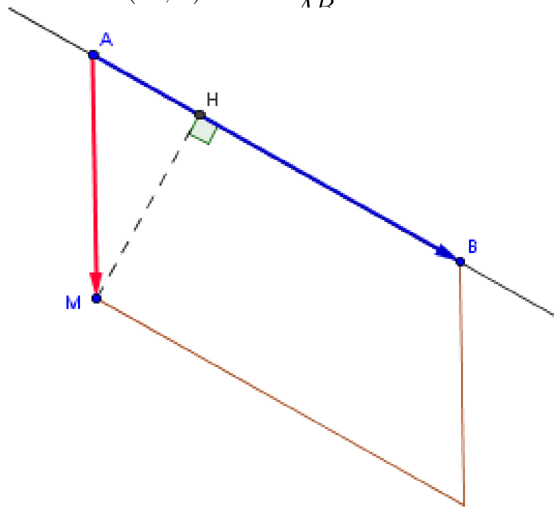
Proposition 4.3.5 (Aire d'un parallélogramme)
soient $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *deux vecteurs non nuls.*
$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ *est l'aire du parallélogramme construit sur* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ♣

Preuve ..... •

On en déduit

Corollaire 4.3.6 *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et B. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a*

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{AB}$$



♣

4.4 Déterminant ou Produit Mixte

4.4.1 Définitions et Propriétés

Définition 4.4.1 *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, on appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ le réel noté $Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et défini par*

$$Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

On note aussi cette quantité $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ on parle alors du produit mixte de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ♠

Proposition 4.4.1 *Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si*

$$Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$$

ils forment une base si et seulement si

$$Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$$

♣

Démonstration ..... •

Proposition 4.4.2 *Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ b.o.n alors*
$\mathcal{B}$ b.o.n.d. si et seulement si $Det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 1$ ♣

Proposition 4.4.3 *l'application déterminant Det :* $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est trilinéaire et antisymétrique.*

Trilinéaire i.e. elle est linéaire relativement à chacune de ses trois composantes.
Par exemple

$$\begin{aligned} \forall(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^4, \quad & Det(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= Det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + Det(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ \forall(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}^3, \quad & Det(\lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \lambda Det(\overrightarrow{u}\, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \end{aligned}$$

antisymétrique i.e. que le déterminant de trois vecteurs change de signe lorsque l'on permute deux d'entre eux.

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^3, \quad Det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = Det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

♣

Preuve ...... •

Remarque 4.4.1 *la permutation circulaire de trois vecteurs ne change pas la valeur du déterminant*

$$Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = Det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = Det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$$

*

Proposition 4.4.4 (Caractérisation à l'aide des coordonnées cartésiennes dans une b.o.n.d.)

On rappelle que $\mathcal{B}$ *est une b.o.n.d. de* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, *on note* $\overrightarrow{u}(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{v}(x', y', z')_{\mathcal{B}}$ *on a alors*

$$Det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3$$

On note aussi

$$Det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

♣

Preuve ..... •

Remarque 4.4.2 *On peut retenir la formule dite de développement du déterminant par rapport à la dernière colonne*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \times y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \times z_3$$

Et puisque le déterminant est invariant par permutation circulaire on a aussi le développement rapport à la première colonne

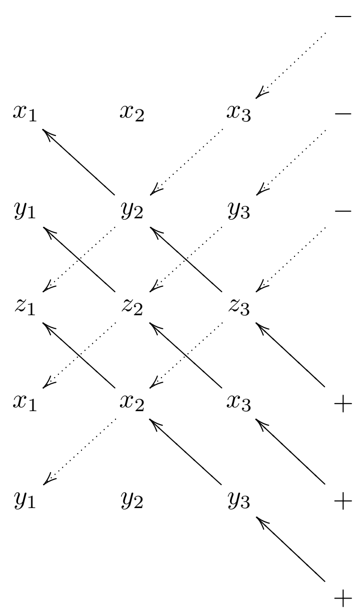
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \times \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

On pourrait également parler du développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_2 \times \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \times \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \times \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

*

Remarque 4.4.3 (Méthode de Sarrus) *On recopie les deux premières lignes du tableau sous le tableau correspondant au déterminant cherché, puis on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe + ou − selon le schéma*



∗

4.4.2 Applications

Proposition 4.4.5 (Interprétation Géométrique) *Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ de l'espace, $|Det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ est égal au volume du parallélépipède dont les côtés sont portés par $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$* ♣

Preuve .... •

Corollaire 4.4.6 *Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par deux vecteurs libres $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$,on a*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|Det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

♣

Preuve .... •

Proposition 4.4.7 *Soit A un point et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres. Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}) = k$ est un plan dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$* ♣

Preuve .... •

4.5 Plans de l'espace

4.5.1 Equations

Dans toute cette section l'espace est rapporté à un r.o.n.d. $\mathcal{R}$. on note $\mathcal{B}$ la b.o.n.d. associée.

Proposition 4.5.1 (Equation paramétrique)
Ici $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ sont quelconques.

Soit $A(a,b,c)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u_1}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)_{\mathcal{B}},\overrightarrow{u_2}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Une équation paramétrique dans $\mathcal{R}$ du plan $A+\mathbb{R}\overrightarrow{u_1}+\mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$ est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+\lambda\alpha_1+\mu\alpha_1 \\ y & = & b+\lambda\beta_1+\mu\beta_2 \\ z & = & c+\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2 \end{array}\right. \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

♣

Exercice: Ecrire une équation paramétrique du plan passant par les points $A(3,2,2),B(5,-2,1)$ et $C(7,0,-1)$.

Preuve .... •

Proposition 4.5.2 (Equation cartésienne et vecteur normal) *Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. alors il admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ (r.o.n.)*

$$(*) \qquad ax+by+cz+d=0 \qquad \textit{avec } (a,b,c)\neq(0,0,0)$$

où a,b,c,d sont des constantes réelles.
Réciproquement toute équation de ce type est une équation de plan En particulier :
le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b,c)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$
♣

Démonstration .... •

Remarque: Une équation cartésienne du plan $M_0+(\mathbb{R}\overrightarrow{n})^{\perp}$ relativement à un r.o.n. est donnée par

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

avec $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et $\overrightarrow{n}(a,b,c)$

Proposition 4.5.3 *Une équation cartésienne du plan $M_0+\mathbb{R}\overrightarrow{u_1}+\mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$ relativement à un r.o.n.d, est donnée par*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y-y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z-z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0$$

avec $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et $\overrightarrow{u_i}(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$ ($i\in\{1,2\}$) ♣

Preuve .... •

Exercice: Cette proposition est-elle vraie dans un repère quelconque ?

Exercice: Ecrire une équation cartésienne du plan passant par les points $A(3,2,2),B(5,-2,1)$ et $C(7,0,-1)$.

Corollaire 4.5.4 *Soient A,B,C non alignés.*
Une équation cartésienne du plan (ABC) relativement à un r.o.n.d $\mathcal{R}$, est donnée par

$$\begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A & x_C-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A & y_C-y_A \\ z-z_A & z_B-z_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0$$

avec $A(x_A,y_A,z_A)_{\mathcal{R}}$ $B(x_B,y_B,z_B)_{\mathcal{R}}$ et $C(x_C,y_C,z_C)_{\mathcal{R}}$ ♣

Proposition 4.5.5 *Soient $a,a',b,',c,c',d,d'$ huit réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $(a',b',c')\neq(0,0,0)$. les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$*

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \textit{et} \qquad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

caractérisent une seule et même plan si et seulement si

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}^*, \qquad a'=\lambda a \qquad b'=\lambda b \qquad c'=\lambda c \quad \textit{et} \quad d'=\lambda d$$

♣

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

Preuve .... •

Exercice: Montrer que cette proposition reste vraie dans un repère quelconque.

Définition 4.5.1 (Equation Normale)
Tout plan admet une équation normale, il s'agit d'une équation du type

$$ax + by + cz = p \qquad et \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles. Elles sont uniques au signe près. ♠

Remarque 4.5.1 *Supposons le repère est orthonormé.*
une telle équation caractérise un plan de vecteur unitaire normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ Plus précisément c'est la la surface de niveau

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = p$$

Réciproquement Partant d'un plan de vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$, on trouve l'équation normale

$$ax + by + cz = p \qquad et \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

où p est la mesure algébrique $\overline{OH}$ orienté par $\overrightarrow{n}$ et H est le projeté orthogonale de O sur $\mathcal{P}$. *

Remarque 4.5.2 *On peut noter $\overrightarrow{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ où α, β, γ sont des mesures des écarts angulaires entre le vecteur $\overrightarrow{n}$ et les vecteurs de base d'une b.o.n.*
L'équation normale devient

$$\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z = p$$

*

4.5.2 Plans remarquables

Définition 4.5.2 (Plans parallèles et orthogonaux) *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de normales respectives n et n'.*
On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si n et n' sont colinéaires.
On note $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$.
On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}'$
On note $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$. ♠

Exercice: Montrer que ces définitions ne dépendant pas du choix des vecteurs normaux

Proposition 4.5.6
$A + (\mathbb{R}\overrightarrow{v})^{\perp}$ *est parallèle à* $A' + (\mathbb{R}\overrightarrow{v}')^{\perp}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$
$A + (\mathbb{R}\overrightarrow{v})^{\perp}$ *est orthogonal à* $A' + (\mathbb{R}\overrightarrow{v}')^{\perp}$ *si et seulement si* $(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}') = 0$ ♣

Exercice: Caractériser à l'aide des coefficients de leurs équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$, le fait que deux plans sont parallèles ou orthogonaux

Proposition 4.5.7 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes dans un r.o.n.*

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad et \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{P}'$ si et seulement si (a, b, c) est proportionnel à (a', b', c')

Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, et l'on a
$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ avec $\overrightarrow{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{n}'(a', b,', c')_{\mathcal{B}}$ ♣

Preuve ..... •

4.5.3 Applications

Proposition 4.5.8 (Calcul de distances) *Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ (r.o.n.)*

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

et $M(X, Y, Z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|aX + bY + cZ + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

♣

Preuve .... •

Corollaire 4.5.9 *Soient M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan quelconques.*

$$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow d(M, \mathcal{P}) = 0$$

♣

4.6 Droites de l'Espace

Comme dans le plan la caractérisation d'une droite par son vecteur directeur nous donne

4.6.1 Equations

Dans toute cette section l'espace est rapporté à un r.o.n.d. $\mathcal{R}$. on note $\mathcal{B}$ la b.o.n.d. associée.

Proposition 4.6.1 (Equation paramétrique)
Ici $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ sont quelconques.
Soit $A(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ un vecteur non nuls de l'espace. Une équation paramétrique dans $\mathcal{R}$ du plan $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + \lambda\alpha \\ y & = & b + \lambda\beta \\ z & = & c + \lambda\gamma \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

♣

Exercice: Ecrire une équation paramétrique de la droite passant par les points $A(3, 2, 2) et B(5, -2, 1)$

Preuve .... •

Remarque 4.6.1 *Lorsque ceci à un sens on peut réécrire cette équation paramétrique comme*

$$\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}$$

*

Proposition 4.6.2 (Equation cartésienne et vecteur directeur) *Toute droite de l'espace est l'intersection de deux plans de l'espace elle admet pour équation cartésienne dans un r.o.n.d.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{array} \right.$$

avec $\overrightarrow{n}(a, b, c)_{\mathcal{B}}$ $\overrightarrow{n}'(a', b', c')_{\mathcal{R}}$ non colinéaires.
Réciproquement tout système de ce type caractérise une droite.
En particulier $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ est vecteur directeur de cette droite ♣

4.6.2 Droites Remarquables

Définition 4.6.1 *Deux droites sont dites parallèles (resp. orthogonales) si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires colinéaires (resp. orthogonaux)*

Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite est inclus dans le plan

Si de plus cette droite et ce plan ont un point en commun on dira que la droite est incluse dans le plan. ♠

Exercice: Montrer que ces définitions ne dépendent pas du choix du vecteur directeur

Définition 4.6.2 *Deux droites orthogonales et sécantes sont dites perpendiculaires.* ♠

Proposition 4.6.3 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan d'équations dans un r.o.n.d.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz &=& d \\ a'x+b'y+c'z &=& d' \end{array}\right. \qquad et \qquad a''x+b''y+c''z=d''$$

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécantes leur point d'intersection est le point $A(X, Y, Z)$

$$(*) \qquad X = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \qquad et \qquad Z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

♣

Preuve ...... •

Corollaire 4.6.4 *Le système*

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz &=& d \\ a'x+b'y+c'z &=& d' \\ a''x+b''y+c''z &=& d'' \end{array}\right.$$

admet un unique triplet solution si et seulement si $\Delta \neq 0$ (Où Δ est le déterminant du système).
On dit dans ce cas qu'il s'agit d'un système de Cramer et l'unique solution (X, Y, Z) est donnée par $(*)$
♣

Corollaire 4.6.5 *Soient $\overrightarrow{u_i}(a_i, b_i, c_i)$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ trois vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont relatives à un repère quelconque.*

$$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \text{ coplanaires si et seulement si } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

♣

Preuve ...... •

Proposition 4.6.6 *Le plan $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u_1} + \mathbb{R}\overrightarrow{u_2}$ admet pour équation cartésienne dans un repère quelconque*

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est du type

$$(*) \qquad ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

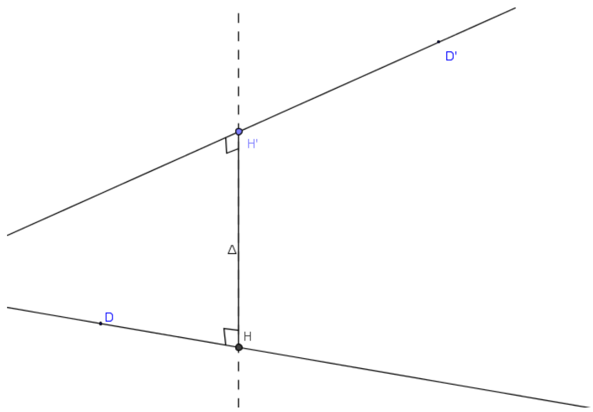
Réciproquement toute équation du type $(*)$ *relativement à un repère quelconque est celle d'un plan* ♣

Preuve .... •

Remarque 4.6.2 *Grâce à ce dernier corollaire, on voit qu'il en va de même pour le système d'équations cartésiennes associé à une droite dans un repère quelconque* $*$

Proposition 4.6.7 (Perpendiculaire commune)
Soient $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *deux droites non parallèles de l'espace.*
Il existe une et une seule droite Δ *qui soit simultanément perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *et à* $\mathcal{D}'$.
Cette droite porte le nom de perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ *et à* $\mathcal{D}'$, *elle est dirigée par* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$ *où* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u}'$ *sont vecteurs directeurs de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ ♣

Démonstration .... •



Remarque 4.6.3 *en notant* H *et* H' *l'intersection de* Δ *avec* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *on dit que* HH' *est la distance entre les droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$. *On note*

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \stackrel{def}{=} HH'$$

H *et* H' *sont les seuls points qui réalisent le minimum de* $d(M, M')$ *lorsque* M *parcourt* $\mathcal{D}$ *et* M' *parcourt* $\mathcal{D}'$ $*$

Exercice: le prouver.

4.7 Sphères de l'espace

4.7.1 Equations

Définition 4.7.1 *On appelle sphère de centre* $\Omega \in \mathcal{E}$ *et de rayon* R *avec* $R \geq 0$ *l'ensemble de points* M *tel que*

$$\Omega M = R$$

On note $S(\Omega, R)$ *un tel ensemble.*
Deux points symétriques par rapport au centre Ω *sont dit diamétralement opposés.*
On note $S(A, B)$ *la sphère de diamètre* $[AB]$ ♠

Proposition 4.7.1 (Equation Cartésienne) *Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé.*
Toute sphère admet pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où les constantes réelles sont telles que $d \leq a^2 + b^2 + c^2$
Réciproquement toute équation de ce type caractérise une sphère.
Plus précisément il s'agit de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ ♣

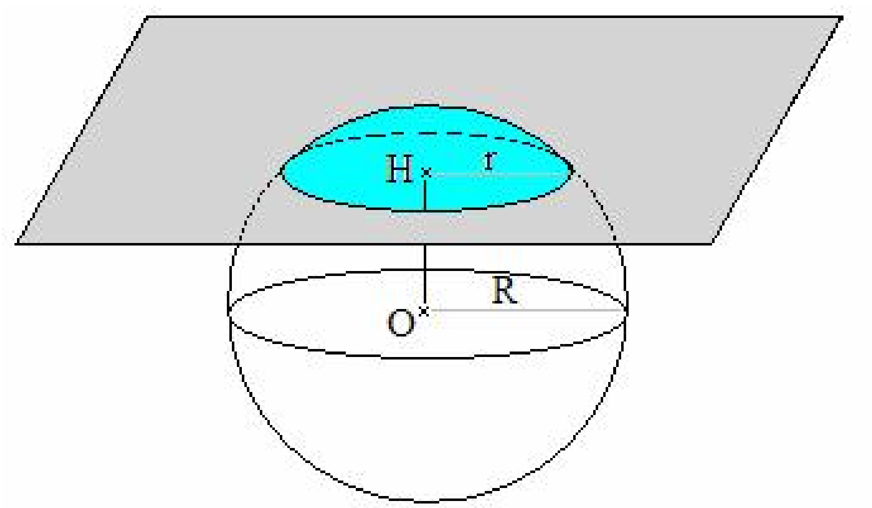
Preuve .... •

4.7.2 Intersections, Droites et Plans remarquables

Proposition 4.7.2 (Intersection Plan Sphère)
Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ une sphère avec $R > 0$.

$$\begin{array}{lcll} d(\Omega, \mathcal{P}) > R & \Longleftrightarrow & \mathcal{P} \cap \mathcal{S} & \text{est vide} \\ d(\Omega, \mathcal{P}) = R & \Longleftrightarrow & \mathcal{P} \cap \mathcal{S} & \text{est réduit à un point} \\ d(\Omega, \mathcal{P}) < R & \Longleftrightarrow & \mathcal{P} \cap \mathcal{S} & \text{est un cercle} \end{array}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.
Dans le troisième cas il s'agit du cercle du plan $\mathcal{P}$ $C(H, \sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \mathcal{P})})$ ♣



Preuve .... •

Définition 4.7.2 (Plan tangent)
Avec les notations ci-dessus, on dit que $\mathcal{P}$ est tangente à $\mathcal{S}$ en A lorsque $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{A\}$.
***la** tangente en A à la sphère $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ est le plan $\mathcal{P} = A + (\mathbb{R}\overrightarrow{\Omega A})^{\perp}$* ♠

Proposition 4.7.3 *Si dans un r.o.n. la sphère $\mathcal{S}$ admet pour équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Alors le plan tangent en $A(x_A, y_A, z_A)$ admet pour équation

$$xx_A + yy_A + zz_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) - c(z + z_A) + d = 0$$

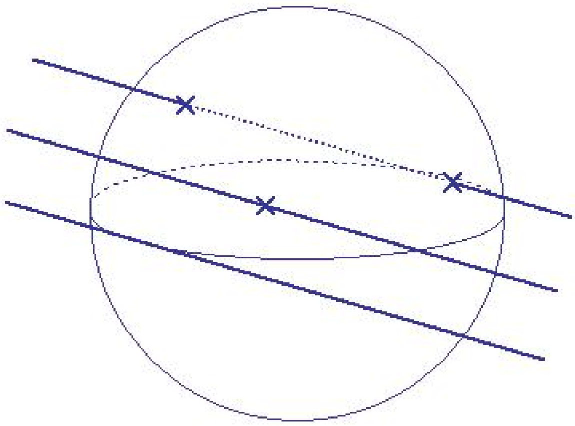
♣

Preuve .... •

Proposition 4.7.4 (Intersection droite sphère)
Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{S} = S(\Omega, R)$ une sphère avec $R > 0$.

$$\begin{array}{lcll} d(\Omega, \mathcal{D}) > R & \Longleftrightarrow & \mathcal{D} \cap \mathcal{S} & \textit{est vide} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) = R & \Longleftrightarrow & \mathcal{D} \cap \mathcal{S} & \textit{est réduit à un point} \\ d(\Omega, \mathcal{D}) < R & \Longleftrightarrow & \mathcal{D} \cap \mathcal{S} & \textit{est constitué de deux points distincts} \end{array}$$

Dans le deuxième cas l'unique point d'intersection est le point H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.
Dans le troisième cas les deux points sont distants de H de $\sqrt{R^2 - d^2(\Omega, \mathcal{D})}$ ♣



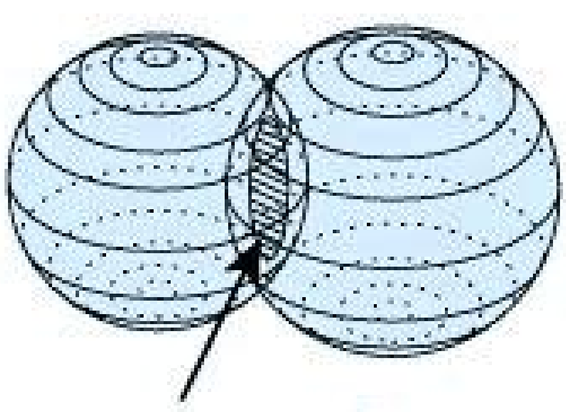
Preuve .... •

Définition 4.7.3 *On dit que $\mathcal{D}$ est tangent à $\mathcal{S}$ lorsque leurs intersections est réduite à un point A.*
Dans ce cas $\mathcal{D}$ est inclus dans le plan tangent à A, et toutes les droites de ce plan passant par A sont tangentes à $\mathcal{S}$ ♠

Proposition 4.7.5 (Intersection de deux sphères)
Soient $\mathcal{S}_1 = S(\Omega_1, R_1)$ et $\mathcal{S}_2 = S(\Omega_2, R_2)$ deux sphères non concentriques. Notons $d = \Omega_1\Omega_2$

$$\begin{array}{rcccl} |R_1 - R_2| & < & d & < & R_1 + R_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \quad \textit{est un cercle} \\ d = |R_1 - R_2| & \textit{ou} & & & d = R_1 + R_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \quad \textit{est réduit à un point} \\ d < |R_1 - R_2| & \textit{ou} & & & d > R_1 + R_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \quad \textit{est vide} \end{array}$$

♣



Preuve .... •