

Table des matières

5 Fonctions Usuelles	3
5.1 Fonctions Polynômiales et Fractions Rationnelles	3
5.2 Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances	4
5.2.1 exponentielle réelle	4
5.2.2 Logarithme	5
5.2.3 Fonction Puissance	6
5.2.4 Croissances Comparées	8
5.3 Fonctions Hyperboliques	9
5.3.1 Fonctions Hyperboliques	9
5.3.2 Fonctions Hyperboliques Réciproques	12
5.4 Fonctions Circulaires	15
5.4.1 Fonctions Circulaires	15
5.4.2 Fonctions circulaires Réciproques	18
5.5 Bilan	22
5.6 Fonction exponentielle complexe	22

Chapitre 5

Fonctions Usuelles

5.1 Fonctions Polynômiales et Fractions Rationnelles

Définition 5.1.1 On appelle fonction polynômiale toute fonction réelle du type $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, où $a_0, \dots, a_n$ sont des constantes réelles fixées.

Dans le cas où $a_n \neq 0$, on dit que f est de degré n ♠

Proposition 5.1.1 Toute combinaison linéaire de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale. Tout produit de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale. ♣

Proposition 5.1.2 Toute fonction polynômiale est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et de plus la dérivée est encore une fonction polynômiale. Plus précisément

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)' = a_1 + \dots + na_nx^{n-1}$$

♣

Proposition 5.1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in [0, n]}$ une famille de réels fixés avec $a_n \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_nx^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_nx^n$$

♣

Proposition 5.1.4 Soit f une fonction polynômiale de degré $n \geq 1$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x

$$f(x) = y$$

admet au plus n solutions.

Dans le cas où $y = 0$, les solutions sont appelées racines de f ♣

Définition 5.1.2 On appelle fonction rationnelle toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales. Tout fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. ♠

Proposition 5.1.5 Toute combinaison linéaire de fonctions rationnelles est une fonction rationnelle. Tout produit ou quotient de fonctions rationnelles est une fonction rationnelle. ♣

Proposition 5.1.6 Toute fonction rationnelle est continue et dérivable sur son domaine de définition. Et de plus la dérivée est encore une fonction rationnelle ayant même domaine de définition ♣

Proposition 5.1.7 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in [0, n]}$ et $(b_j)_{j \in [0, p]}$ deux familles de réels fixés avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + \dots + b_px^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + \dots + b_px^p} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p}$$

♣

5.2 Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

5.2.1 exponentielle réelle

Proposition 5.2.1 (Définition) *La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$, notée $\exp$ et vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) \quad \text{et} \quad (\exp)'(0) = 1$$

on note $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ le nombre de Néper. ♣

Remarque 5.2.1 *En particulier $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$* *

Proposition 5.2.2 *La fonction exponentielle réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

$$(\exp)' = \exp$$

♣

Preuve • Calculons la dérivée.

On dérive la propriété fondamentale par rapport à y

$$\frac{d}{dy} \exp(x + y) = \frac{d}{dy} (\exp(x) \exp(y))$$

puis on évalue en $y = 0$

• Par ailleurs puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = [\exp(x/2)]^2 \geq 0$ et que $\exp$ n'est jamais nul (le prouver) on en déduit que $(\exp)' > 0$ et donc $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection entre $\mathbb{R}$ et son intervalle image dont les bornes sont données par les limites (grâce au théorème de la bijection)

• Calculons les limites.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \geq 1 + x$ (voir lemme ci-dessous), on en déduit par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

On en déduit par composition des limites D'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

•

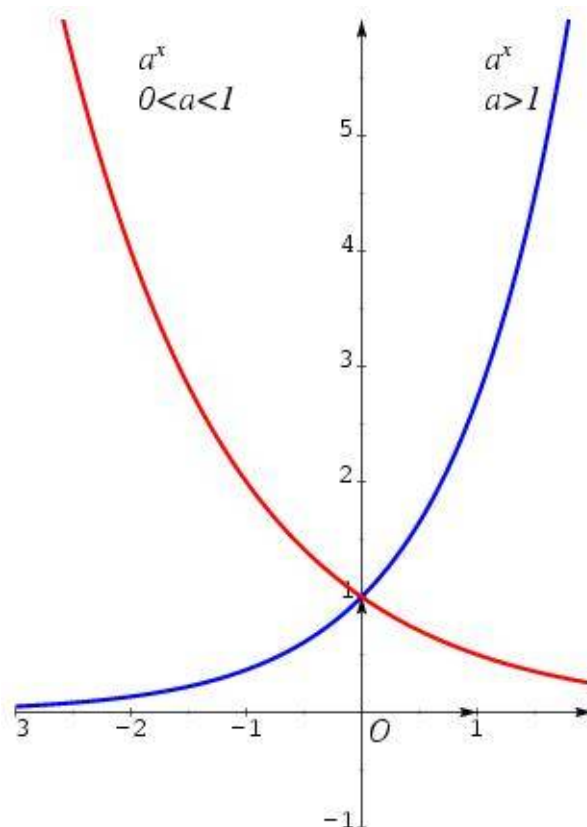
Représentation Graphique

Lemme 5.2.3 *Le graphe de la fonction exponentiel est au dessus de sa tangente en 0 :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1 + x$$

♣

Exercice: le prouver



5.2.2 Logarithme

Proposition 5.2.4 (Définition) la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la bijection induite par l'exponentielle. Elle se note $\ln$ elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{et} \quad (\ln)'(1) = 1$$

En particulier $\ln(e) = 1$ et cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

♣

Preuve Le théorème de la bijection nous assure l'existence, la continuité et la dérivabilité de $\ln$ (car $(\exp)'$ ne s'annule jamais). En particulier

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{(\exp)'(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Pour relation fondamentale il suffit de prendre $x = \exp(X)$ et $y = \exp(Y)$.

•

Remarque 5.2.2

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp(x) &\iff x = \ln y \\ \forall y > 0, \quad \exp(\ln y) &= y \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp x) = x \end{aligned}$$

*

Proposition 5.2.5 La fonction logarithme népérien réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

♣

Exercice: le prouver

Lemme 5.2.6 *Le graphe de la fonction logarithme est en dessous de sa tangente en 1 :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(x) \leq x - 1$$



Exercice: le prouver

Proposition 5.2.7 (logarithme base b) *Soit $b > 0$ avec $b \neq 1$, on appelle logarithme base b la fonction notée Log_b est définie par*

$$\text{Log}_b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^$ et vérifie*

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \text{Log}_b(xy) = \text{Log}_b(x) + \text{Log}_b(y)$$



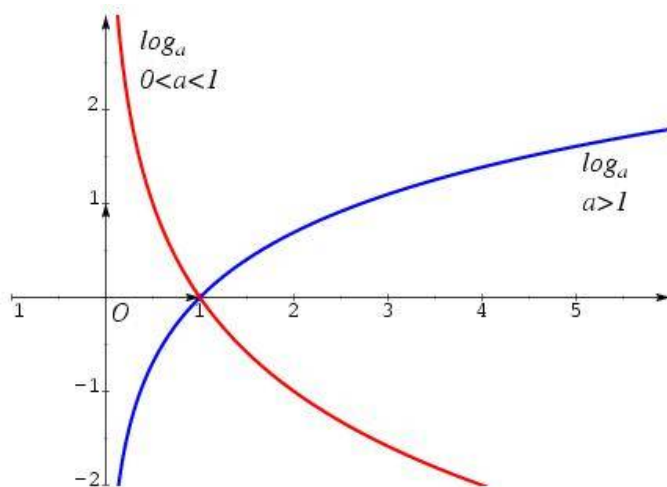
Proposition 5.2.8

• **Si $0 < b < 1$ Alors**

La fonction logarithme base b réalise une bijection strictement décroissante entre $\mathbb{R}_+^$ et $\mathbb{R}$*

• **Si $b > 1$ Alors**

La fonction logarithme base b réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+^$ et $\mathbb{R}$*



5.2.3 Fonction Puissance

Définition 5.2.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on appelle fonction racine n -ième la fonction réciproque de la bijection*

$$\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

On note

$$\left. \begin{array}{l} y = x^n \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$



Définition 5.2.2 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour tout $x > 0$, on pose*

$$x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp[\alpha \ln(x)]$$

On définit ainsi la fonction puissance α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^\alpha$.
En particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \exp(x)$$

♠

Remarque 5.2.3 Pour α entier relatif, x^α coïncide avec la puissance α -ième de x (pour $x > 0$).
Si $\alpha = 1/n$ on retrouve alors la racine n -ième.

*

Remarque 5.2.4 On a pour tout $b > 0$ avec $b \neq 1$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad b^{x+y} = b^x b^y \quad \text{et} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = b^x \iff x = \text{Log}_b y$$

*

Proposition 5.2.9 La fonction puissance α vérifie.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

♣

Proposition 5.2.10 La fonction puissance α est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

En particulier elle réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, pour $\alpha > 0$.
Et une bijection strictement décroissante entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, pour $\alpha < 0$

♣

Exercice: Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle I , montrer qu'alors la fonction $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée

$$x \mapsto \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right) u(x)^{v(x)}$$

Correction : cette fonction s'écrit comme produit et composées de fonctions dérivables :

$$f : \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & u(t) & \mapsto & \ln(x) \end{array} \quad \text{dérivable comme composée}$$

$$g : \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) \times f(x) \end{array} \quad \text{dérivable comme produit}$$

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) \times f(x) & \mapsto & \exp(z) \end{array} \quad \text{dérivable comme composée}$$

D'où la dérivabilité et formule de la dérivée par les théorèmes de dérivation

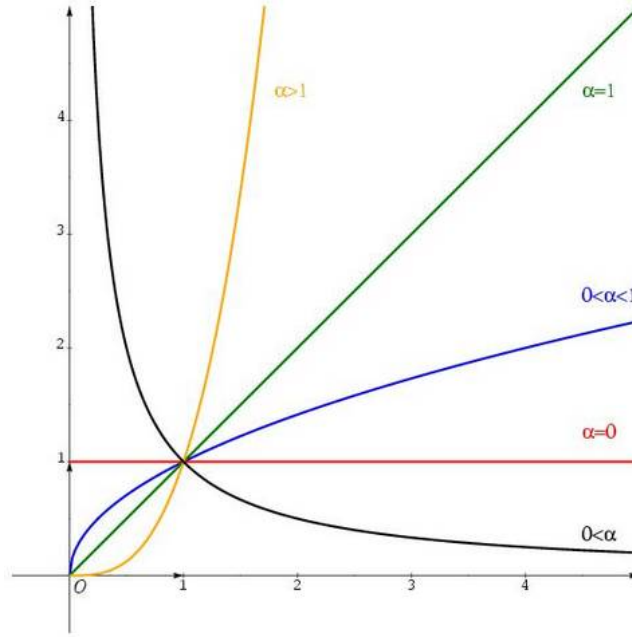
Remarque 5.2.5 On retrouve aisément la formule grâce à la dérivée logarithmique de $f : u^v$ car alors

$$\frac{f'}{f} = \frac{d}{dt}(\ln f(t)) = \frac{d}{dt}(v(t) \ln u(t)) = v'(t) \ln(u(t)) + v(t) \frac{u'(t)}{u(t)}$$

On rappelle que la dérivée logarithmique est très utile pour calculer les dérivées de $p = f_1 f_2$ ou de quotients $q = f_1 / f_2$ dérivables :

$$\frac{p'}{p} = \frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_2'}{f_2} \quad \text{et} \quad \frac{q'}{q} = \frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_2'}{f_2}$$

*



5.2.4 Croissances Comparées

Proposition 5.2.11 *Pour tout α réel*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

♣

Démonstration Si $\alpha \leq 0$ facile. Supposons $\alpha > 0$ Posons $f : x \mapsto \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}}$

$$\forall x > 0, \quad \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1+x}{\sqrt{x}}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = +\infty$$

D'où par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Si on pose le changement de variable $\varphi : x \mapsto \frac{x}{2\alpha}$ comme $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème de composition des limites nous donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\frac{x}{2\alpha})}{\sqrt{\frac{x}{2\alpha}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\frac{x}{2\alpha})}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Et donc par composition à gauche avec la fonction puissance 2α , il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\exp(\frac{x}{2\alpha})}{\sqrt{x}} \right)^{2\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{2\alpha} = +\infty$$

•

Corollaire 5.2.12 *Pour tout α réel*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(x)}{|x|^\alpha} = 0$$

♣

Preuve Par le changement de variable $x \mapsto -x$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(x)}{|x|^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-y)}{|-y|^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{-\alpha}}{\exp(y)} = 0$$

On conclut grâce à la proposition précédente et aux théorèmes sur les limites (limite de l'inverse d'une fonction) •

Remarque 5.2.6 On peut également écrire pour a et b deux réels strictement positifs.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b \exp(ax) = 0$$

*

Proposition 5.2.13 Pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

♣

Preuve Posons $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$.

Si on pose le changement de variable $\varphi : x \mapsto \ln(x)$ comme $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème de composition des limites nous donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\exp(\varphi(x))^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\exp(\alpha\varphi(x))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\exp(\varphi(x))^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(\alpha y)}$$

On conclut par la remarque précédente... par le changement de variable $\psi : y \mapsto \alpha y$, comme $\psi(y) \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, le théorème de composition des limites nous donne

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(\alpha y)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\psi(y)}{\exp(\psi(y))} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{z}{\exp(z)} = 0$$

•

Corollaire 5.2.14 Pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

♣

Preuve Par le changement de variable $x \mapsto 1/x$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0$$

•

Remarque 5.2.7 On peut retenir ces quatre dernières propositions en classant par ordre de domination :

$$\ln(x) \lll x^\alpha \lll \exp(x)$$

*

5.3 Fonctions Hyperboliques

5.3.1 Fonctions Hyperboliques

Définition 5.3.1 On appelle sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique les parties respectivement impaires et paires de l'exponentiel. On les note sh et ch .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

♠

Remarque 5.3.1 On a pour tout x réel $\exp(x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ *

Proposition 5.3.1 Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch} \quad \text{et} \quad (\operatorname{ch})' = \operatorname{sh}$$

Par ailleurs

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

♣

Preuve Dérivabilité et dérivée simples. La relation fondamentale provient du calcul direct. •

Proposition 5.3.2 La fonction sinus hyperbolique réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. La fonction cosinus hyperbolique, n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, cependant elle induit une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+$ et $[1, +\infty[$. En particulier

$$\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$$

Et résultat analogue en $-\infty$ (cf parité) ♣

Preuve Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geq 1$$

En effet $\operatorname{ch} x$ est manifestement positive (voir formule) et

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x \geq 1$$

Et on conclut grâce à la croissance de la racine carrée.

On en déduit que sh de dérivée ≥ 1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$ (voir formule calcul simple) et de même (ou par parité) $\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$. D'où d'après le théorème de la bijection, on en déduit que sh est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.

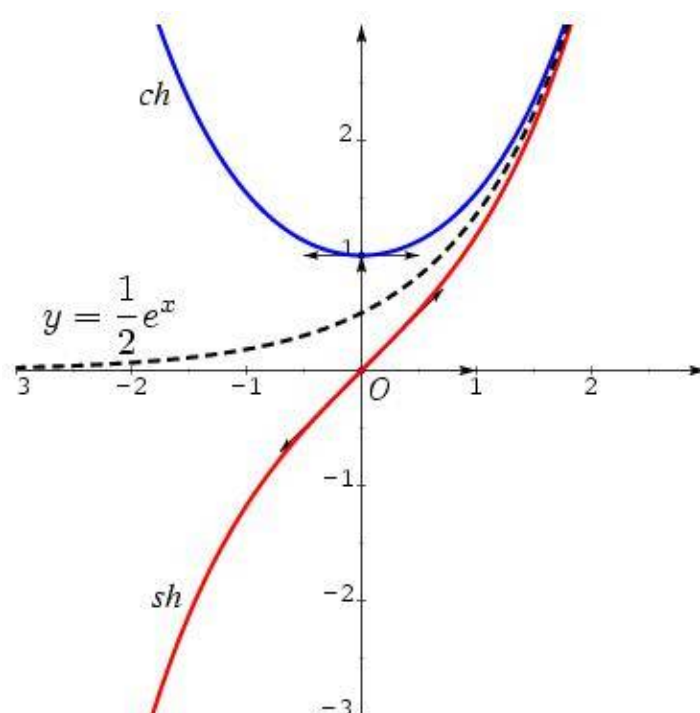
Par parité de ch on voit que ch n'est pas injective. En revanche d'après ce qui précède.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x > \operatorname{sh} 0 = 0$$

Et donc ch est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et par continuité sur $[0, +\infty[$. Enfin un calcul de limites simple nous donne

$$\lim_0 \operatorname{ch} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$$

D'où la conclusion par le théorème de la bijection •



Remarque 5.3.2 Puisque

$$\operatorname{ch} x = e^x \frac{1 + e^{-2x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = e^x \frac{1 - e^{-2x}}{2}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{e^x} = \frac{1}{2}$$

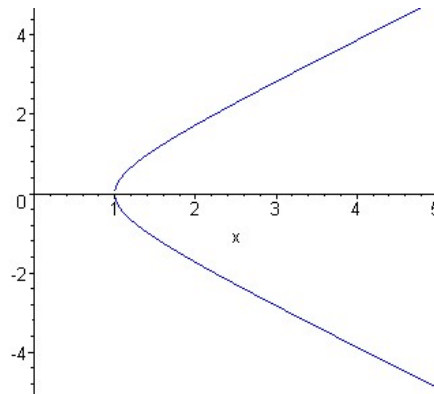
Et donc, on en déduit que ch et sh se comportent asymptotiquement en $+\infty$ comme la fonction $x \mapsto \frac{\exp(x)}{2}$.

*

Remarque 5.3.3 la bijectivité et la relation (*) nous montrent que les fonctions hyperboliques nous permettent de paramétrer les hyperboles du plan. En particulier dans le demi-plan $\{x > 0\}$ la branche de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

*



Exercice: Montrer les relations suivantes

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$$

Définition 5.3.2 On appelle tangente hyperbolique, la fonction notée th et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Cette fonction est impaire

♠

Proposition 5.3.3 La fonction tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\operatorname{th})' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$$

♣

Preuve Dérivabilité et dérivée d'un quotient.

Puis

$$1 - \operatorname{th}^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$$

•

Proposition 5.3.4 La fonction tangente hyperbolique induit une bijection entre $\mathbb{R}$ et $] -1, 1[$. En particulier

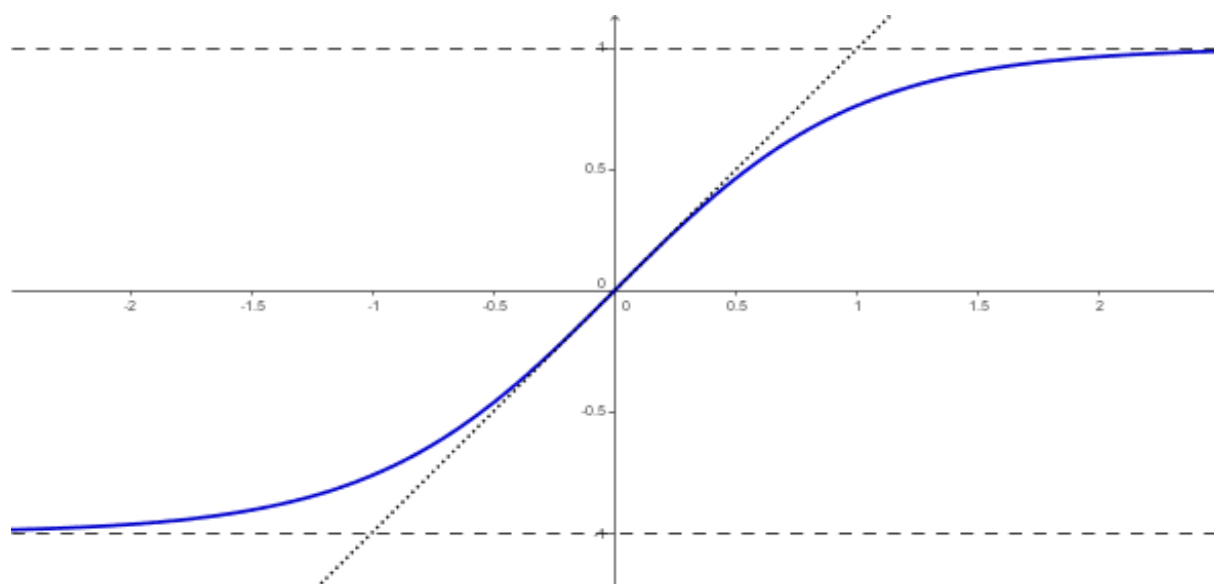
$$\lim_{+\infty} \text{th} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \text{th} = -1$$



Preuve Vu que la dérivée est strictement positive, th est strictement croissante et puisque (voir calcul remarque)

$$\lim_{+\infty} \text{th} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \frac{1-e^{-2x}}{2}}{e^x \frac{1+e^{-2x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

idem en -1 (ou parité) On conclut grâce au théorème de la bijection. •



5.3.2 Fonctions Hyperboliques Réciproques

D'après ce qui précède on a les bijections (continues, dérivables et strictement monotones) :

$$\begin{array}{lll} \phi_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \phi_c : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[& \phi_t : \mathbb{R} \longrightarrow] -1, 1[\\ x \longmapsto \text{sh } x & x \longmapsto \text{ch } x & x \longmapsto \text{th } x \end{array}$$

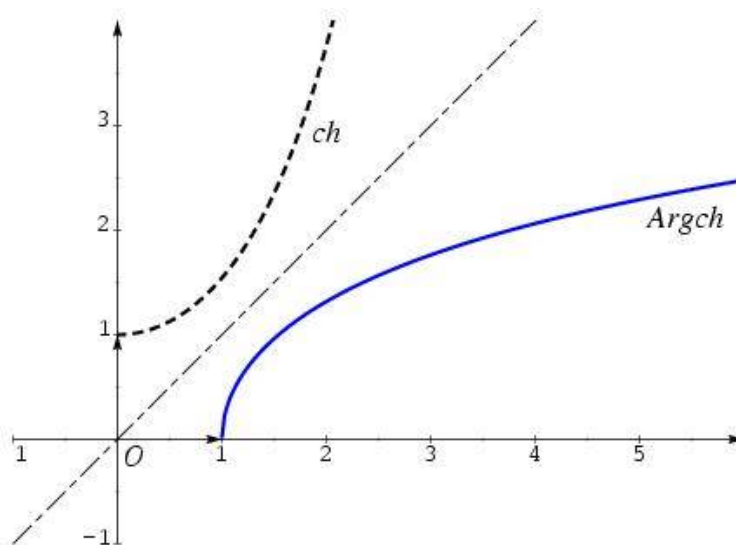
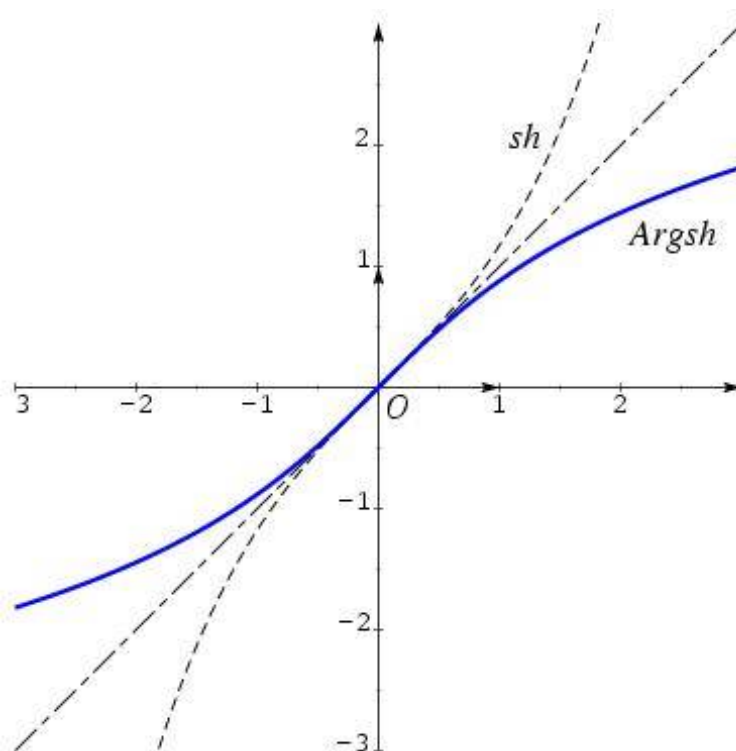
On note alors Argsh , Argch et Argth les fonctions réciproques, elles sont (d'après le théorème de la bijection) continues et :

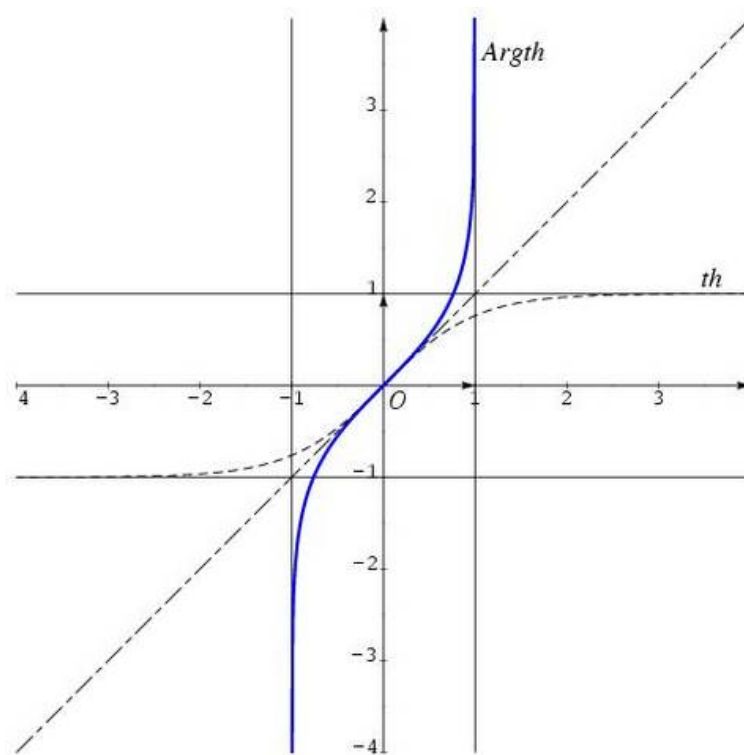
$$\text{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \nearrow \quad \text{Argch} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \nearrow \quad \text{Argth} :] -1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \nearrow$$

Remarque 5.3.4 Les fonctions Argsh et Argth sont impaires *

Remarque 5.3.5 Attention Argth n'a rien à voir avec $\frac{\text{Argsh}}{\text{Argch}}$ *

Exercice: calculer les limites de ces trois fonctions aux bornes de leurs domaines de définition





Lemme 5.3.5 *On a les relations suivantes*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argsh}(\text{sh } x) = \text{sh}(\text{Argsh } x) = x$$

$$\forall x \geq 1, \quad \text{ch}(\text{argch } x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argch}(\text{ch } x) = |x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(\text{Argsh } x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\forall x \geq 1, \quad \text{sh}(\text{Argch } x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argth}(\text{th } x) = x$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{th}(\text{Argth } x) = x$$

♣

Preuve les deux premières et les deux dernières assertions découlent directement de la caractérisation des réciproques de ϕ_s, ϕ_c et ϕ_t (Par exemple $\text{Argch} \circ \phi_c = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$)

La troisième : provient du fait que $\text{Argch} \circ \text{ch}$ est paire (car ch l'est) et que par construction

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{Argch} \circ \text{ch})(x) = (\text{Argch} \circ \phi_c)(x) = x$$

la quatrième assertion provient du fait que :

$$\text{ch}^2(\text{Argsh } x) = \text{sh}^2(\text{Argsh } x) + 1 = x^2 + 1$$

Et on conclut grâce au fait que ch ne prend que des valeurs positives.

De même pour $x \geq 1$,

$$\text{sh}^2(\text{Argch } x) = 1 - \text{ch}^2(\text{Argch } x) = 1 - x^2$$

et $\text{sh}(\text{Argch } x)$ car $\text{Argch } x \geq 0$ et que sh est positive sur $\mathbb{R}_+$.

•

Proposition 5.3.6 *La Fonctions argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

la fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad (\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

la fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (\text{Argth})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

♣

Preuve Par le théorème de la bijection (version dérivable), puisque

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\phi_s)'(x) &= \text{ch } x \neq 0 \\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad (\phi_c)'(x) &= \text{sh } x \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\phi_t)'(x) &= \frac{1}{\text{ch}^2 x} \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad (\phi_s^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\phi_s)'(\phi_s^{-1}(y))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(y))} \\ \forall y \in]1, +\infty[, \quad (\phi_c^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\phi_c)'(\phi_c^{-1}(y))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}(y))} \\ \forall y \in] -1, 1[, \quad (\phi_t^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\phi_t)'(\phi_t^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(y))} \end{aligned}$$

•

Remarque 5.3.6 *la fonction ϕ_c^{-1} (c'est à dire Argch) n'est pas dérivable sur $[1, +\infty[$ car dans le cas contraire par dérivation de l'identité $\phi_c \circ \phi_c^{-1} = \text{Id}_{[1, +\infty[}$, on aurait en 1*

$$(\phi_c^{-1})'(1) \times \phi_c'(\phi_c^{-1}(1)) = 1 \quad \text{i.e.} \quad (\phi_c^{-1})'(1) \times \underbrace{\text{sh}(\text{Argch}(1))}_{=0} = 1$$

*En fait Argch admet une tangente verticale en 1 (symétrique de la tangente horizontale de ch en 0) . **

5.4 Fonctions Circulaires

5.4.1 Fonctions Circulaires

Définition 5.4.1 *On appelle sinus et cosinus les parties respectivement réelle et imaginaire de l'exponentiel complexe. Elle sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques, on les note $\sin$ et $\cos$.*

On note alors $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ la fonction tangente, elle est π -périodique et définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

♠

Remarque 5.4.1 *On renvoie au chapitre sur la trigonométrie pour revoir les propriétés concernant ces fonctions. On en déduit en particulier les symétries suivantes :*

la fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires.

*

Exercice: quelles symétries vérifient les courbes représentatives de $\sin$ et $\cos$ par rapport à l'axe $x = \pi$ et au point $(\pi, 0)$ respectivement (dans un r.o.n.d.)

Lemme 5.4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

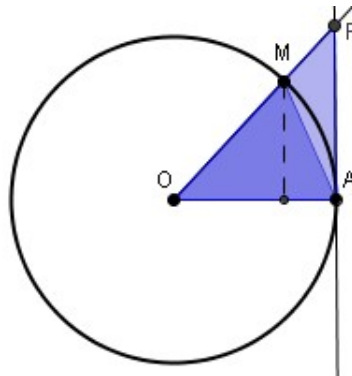
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$



Preuve Par un argument géométrique simple, on montre que

$$\forall \alpha \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq \sin(\alpha) \leq \alpha$$

En effet, soient O le centre du cercle trigonométrique puis A et M deux points de ce cercle formant un angle orienté de α . Il suffit alors de comparer l'aire du secteur angulaire $\widehat{OAM}$ avec celle du triangle OAM .



On en déduit grâce à la parité du sinus que :

$$\forall \alpha \in [-\pi/2, \pi/2], \quad 0 \leq |\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes, en faisant tendre α vers 0

On en déduit la deuxième limite par un passage à la limite en 0 dans la formule

$$\cos(x) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

On a donc établi que

Les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0

Montrons la troisième limite :

Soit $\alpha \in [0, \pi/2]$, considérons sur le cercle unité de centre O , les points $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ et $A(1, 0)$. Considérons également le point $P(1, \tan \alpha) \in (OM)$. En comparant les aires du triangle OAM du secteur angulaire $\widehat{OAM}$ et du triangle OAP , on voit que :

$$\frac{\sin \alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan \alpha}{2}$$

D'où

$$\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1$$

puisque le cosinus est continu en 0, on en déduit par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

D'autre par, puisque le sinus est impair

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Conclusion

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Pour le cosinus : il suffit de voir que

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}$$

D'où par passage à la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

•

Corollaire 5.4.2 *les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et*

$$(\sin)' = \cos \quad \text{et} \quad (\cos)' = -\sin$$

♣

Preuve On se sert des deux premières limites. Soit alors $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

En utilisant les continuités en 0, déjà établies, et en faisant appel à la linéarité de la limite, on voit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x+h) = \sin(x)$$

Et donc la fonction **sinus est continue en x ... donc sur $\mathbb{R}$.**

La **continuité de cosinus** découle alors de l'identité

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

Pour la dérivée on se sert des deux dernières limites plus particulièrement de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{1 - \cos h}{h^2} = 0$$

On conclut alors en faisant $h \rightarrow 0$ dans les égalités ci-dessous.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

•

Exercice: Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$

Corollaire 5.4.3 *La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$(\tan)' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

♣

Preuve Dérivabilité et dérivée d'un quotient... Puis $1 + \tan^2 = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$

•

Proposition 5.4.4 *La fonction tangente hyperbolique induit une bijection entre $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$. En particulier*

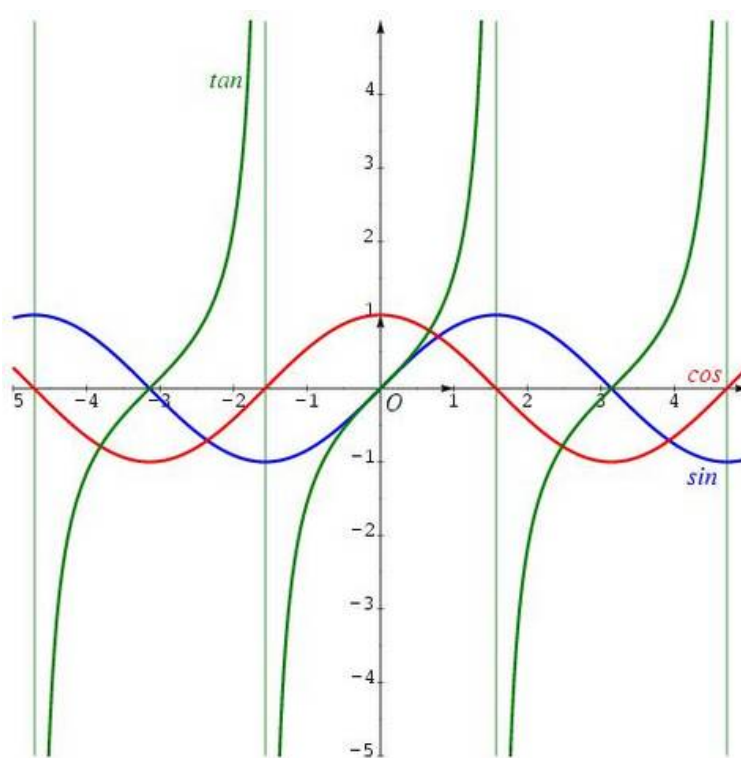
$$\lim_{+\frac{\pi}{2}-} \tan = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\frac{\pi}{2}+} \tan = -\infty$$

♣

Preuve Puisque $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \sin = 1$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \cos = 0^+$ D'où

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$$

la limite en $-\frac{\pi}{2}^+$ se déduit de façon analogue ou en invoquant la caractéristique impaire de $\tan$. Par ailleurs $\tan$ est continue dérivable de dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (car $\frac{1}{\cos^2}$ l'est), on conclut grâce au théorème de la bijection. •



5.4.2 Fonctions circulaires Réciproques

D'après ce qui précède on a les bijections (continues, dérivables et strictement monotones) :

$$\begin{array}{lll} \psi_s : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \quad \begin{array}{lll} \psi_c : [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \quad \begin{array}{lll} \psi_t :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$$

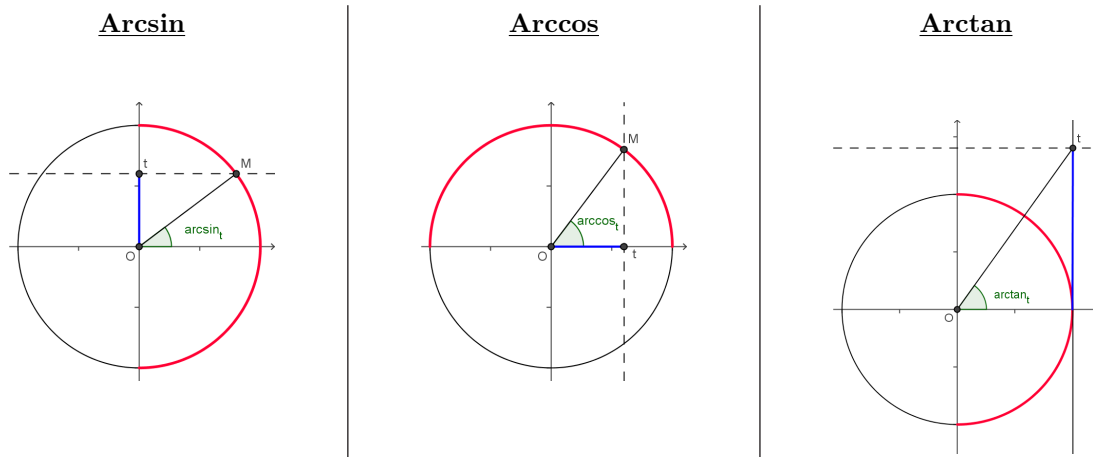
On note alors arcsin, arccos et arctan les fonctions réciproques, elles sont continues et :

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \nearrow \quad \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \searrow \quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\nearrow$$

- Montrons le caractère bijectif pour ψ_s .

D'après ce qui précède $\psi_s' = \cos > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ainsi ψ_s est strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit par continuité sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ que ψ_s y est strictement croissante.

D'où par le théorème de la bijection ψ_s réalise une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et son intervalle image $[\lim_{-\pi/2^+} \psi_s, \lim_{\pi/2^-} \psi_s] = [-1, 1]$



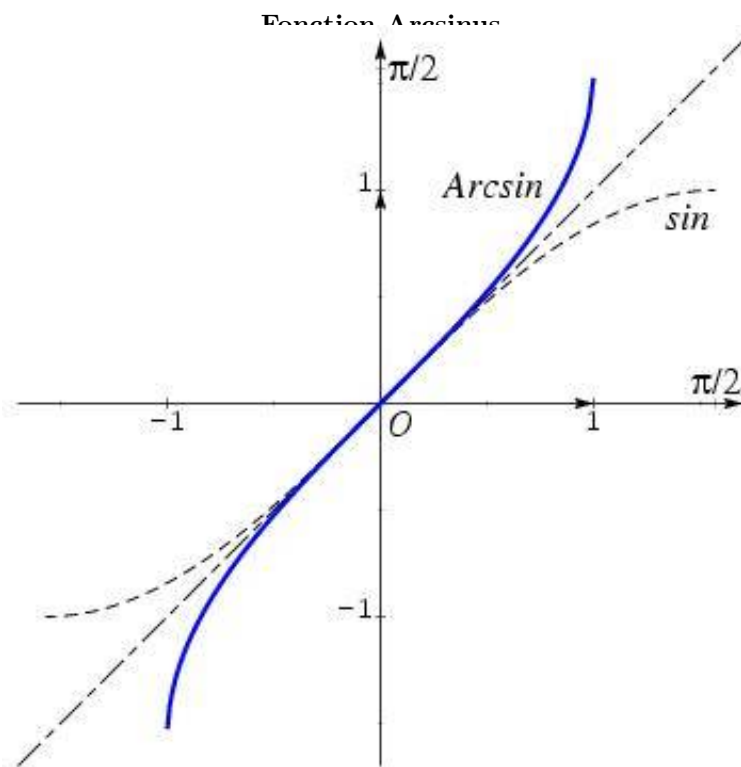
Remarque 5.4.2 Les fonctions $\arcsin$ et $\arctan$ sont impaires

*

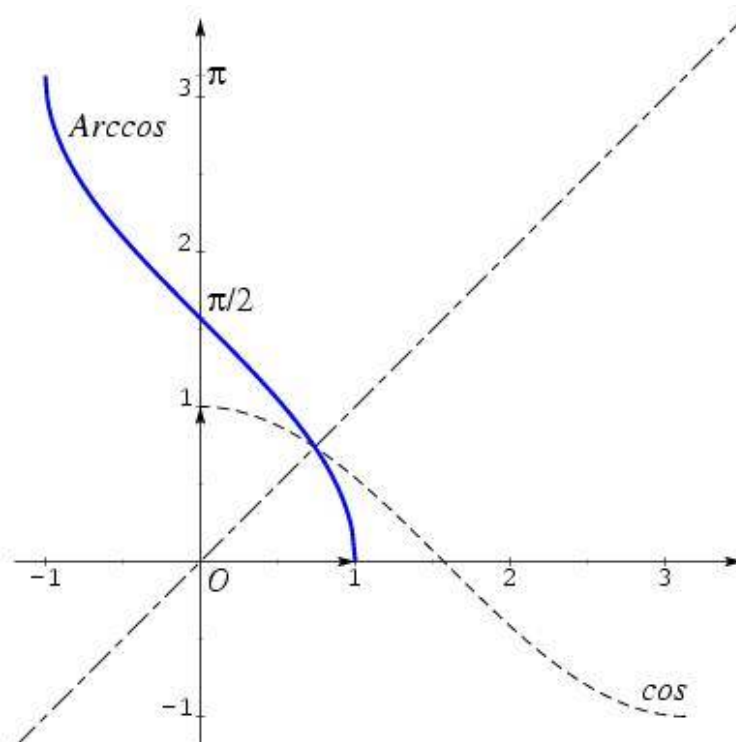
Remarque 5.4.3 Attention $\arctan$ n'a rien à voir avec $\frac{\arcsin}{\arccos}$

*

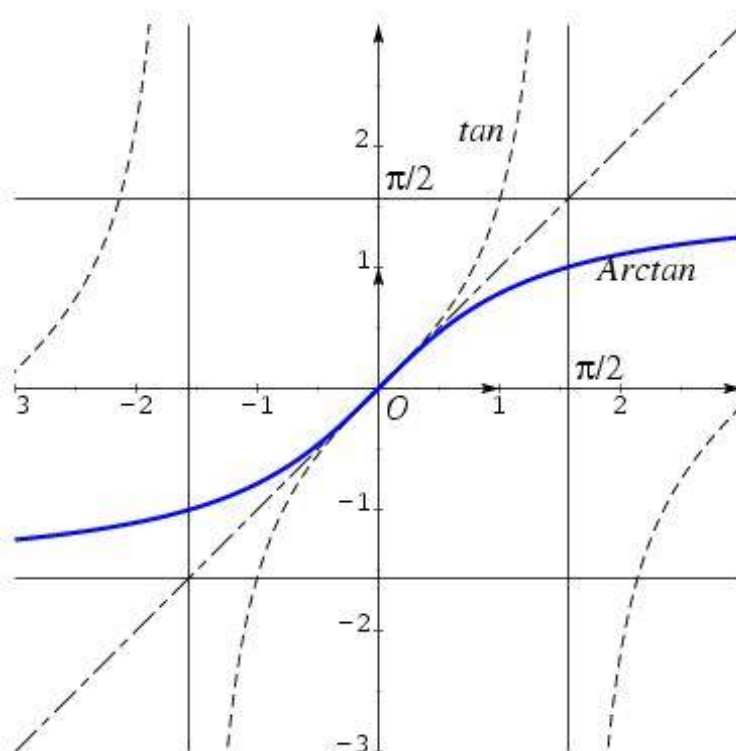
Exercice: calculer les limites $\arctan$ en $\pm\infty$



Fonction Arccosinus



Fonction Arctangente



Lemme 5.4.5 *On a les relations suivantes*

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arctan(\tan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

♣

Preuve Montrons la quatrième assertion : Soit $x \in [-1, 1]$

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$$

Et on conclut grâce au fait que $\cos(\arcsin x) \geq 0$ car $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

De même : $\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$
et $\sin(\arccos x) \geq 0$ car $\arccos x \in [0, \pi]$

•

Proposition 5.4.6 *La Fonctions arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et*

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

la fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

♣

Preuve Par le théorème de la bijection (version dérivable), puisque

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\psi_s)'(x) &= \cos x \neq 0 \\ \forall x \in]0, \pi[, \quad (\psi_c)'(x) &= -\sin x \neq 0 \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\psi_t)'(x) &= 1 + \tan^2 x \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \forall y \in] -1, 1[, \quad (\psi_s^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\psi_s)'(\psi_s^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ \forall y \in] -1, 1[, \quad (\psi_c^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\psi_c)'(\psi_c^{-1}(y))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(y))} \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad (\psi_t^{-1})'(y) &= \frac{1}{(\psi_t)'(\psi_t^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} \end{aligned}$$

•

Remarque 5.4.4 *Le courbes représentatives des fonctions arcsin et arccos admettent une tangente verticale en 1 et -1 (dans un r.o.n.d.)*

*

5.5 Bilan

f	$\mathcal{D}_f$	Parité	Période	Monotonie	bijective
x^2	$\mathbb{R}$	paire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$	de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
$\sqrt{\cdot}$	$\mathbb{R}_+$	X	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$	de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
$\sin$	$\mathbb{R}$	impaire	2π	strict $\nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$
$\arcsin$	$[-1, 1]$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $[-1, 1]$	de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos$	$\mathbb{R}$	paire	2π	strict $\searrow$ sur $[0, \pi]$	de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$
$\arccos$	$[-1, 1]$	X	2π	strict $\searrow$ sur $[-1, 1]$	de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$
$\tan$	$x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$	impaire	π	strict $\nearrow$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$	de $\mathbb{R}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
sh	$\mathbb{R}$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$	de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
Argsh	$\mathbb{R}$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$	de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
ch	$\mathbb{R}$	paire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$	de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$
Argch	$[1, +\infty[$	X	X	strict $\nearrow$ sur $[1, +\infty[$	de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$
th	$\mathbb{R}$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$	de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$
Argth	$] -1, 1[$	impaire	X	strict $\nearrow$ sur $] -1, 1[$	de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$
$\exp$	$\mathbb{R}$	X	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$	de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$\ln$	$\mathbb{R}_+^*$	X	X	strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$	de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$

5.6 Fonction exponentielle complexe

Définition 5.6.1 On définit par extension du cas réel les fonctions à valeurs complexes $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{C}$. On dira que f est continue (resp. dérivable) en un point x_0 lorsque $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont. Dans le cas dérivable on pose

$$f' = (\text{Re}f)' + i(\text{Im}f)'$$



Proposition 5.6.1 Soit $\varphi : t \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes, alors la fonction exponentielle complexe $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ est continue. Si de plus φ est dérivable, on a

$$\frac{d}{dt}(\exp(\varphi(t))) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t))$$



Preuve Posons $\varphi_R = \text{Re}(\varphi)$ et $\varphi_I = \text{Im}(\varphi)$ il s'agit de deux fonctions réelles. Puisque

$$\text{Re}(\exp(\varphi(t))) = e^{\varphi_R(t)} \cos \varphi_I(t) \quad \text{et} \quad \text{Im}(\exp(\varphi(t))) = e^{\varphi_R(t)} \sin \varphi_I(t)$$

la continuité et la dérivabilité s'en déduisent immédiatement. Plus particulièrement, puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{\varphi_R(t)} \cos \varphi_I(t) \right) &= (\varphi_R'(t) \cos \varphi_I(t) - \varphi_I'(t) \sin \varphi_I(t)) e^{\varphi_R(t)} \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\varphi_R(t)} \sin \varphi_I(t) \right) &= (\varphi_R'(t) \sin \varphi_I(t) + \varphi_I'(t) \cos \varphi_I(t)) e^{\varphi_R(t)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(\varphi(t))) &= [(\varphi_R'(t) \cos \varphi_I(t) - \varphi_I'(t) \sin \varphi_I(t)) + i((\varphi_R'(t) \sin \varphi_I(t) + \varphi_I'(t) \cos \varphi_I(t))] e^{\varphi_R(t)} \\ &= [\varphi_R'(t) e^{i\varphi_I(t)} + i\varphi_I'(t) e^{i\varphi_I(t)}] e^{\varphi_R(t)} = \varphi'(t) e^{i\varphi_I(t)} e^{\varphi_R(t)} \end{aligned}$$



Remarque 5.6.1 On a en particulier pour tout $a \in \mathbb{C}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}(\exp(at)) = a \exp(at)$$

