Table des matières

Chapitre 6

Equations Différentielles Linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne aussi bien le corps $\mathbb{R}$ que le corps $\mathbb{C}$.

6.1 caractérisation de l'exponentiel

Proposition 6.1.1 *La fonction exponentielle $t \mapsto \exp(at)$ avec $a \in \mathbb{C}$ est l'unique fonction dérivable φ sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\varphi' = a\varphi \qquad \textit{et} \qquad \varphi(0) = 1$$

On dit que l'exponentielle est caractérisée par l'équation différentielle $y' = ay$ et la condition initiale $y(0) = 1$ ♣

Démonstration Par un calcul direct, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{-at}\varphi(t)\right) = e^{-at}\left(\varphi'(t) - a\varphi(t)\right)$$

D'où $\varphi' = a\varphi \Longleftrightarrow t \mapsto e^{-at}\varphi(t)$ est constante sur $\mathbb{R}$
Comme de plus $\varphi(0) = 1$, cette constante vaut 1. •

Corollaire 6.1.2 *Toute fonction **non nulle** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable et et vérifiant l'équation fonctionnelle*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$

s'écrit sous la forme $f : t \mapsto \exp(at)$ avec $a \in \mathbb{C}$. En particulier $a = f'(0)$ ♣

Preuve En dérivant l'égalité fonctionnelle par rapport à la variable y on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f(x)f'(y)$$

D'où en posant $a = f'(0)$ et en prenant $y = 0$ dans l'égalité ci-dessus, on voit que f vérifie l'equation différentielle caractérisant la fonction $t \mapsto e^{at}$ •

6.2 Equations Linéaires du premier ordre (résolues)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle Equations linéaires homogènes d'ordre 1 (résolue), toute équation différentielle du type

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + ay = b$$

où y est l'inconnue (fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$) et a et b sont données, ce sont deux **fonctions continues** sur l'**intervalle** I (à valeurs dans $\mathbb{K}$)

On tolère l'abus de notation suivant

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

ou encore

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + a(x)y = b(x)$$

Résoudre $(\mathcal{E})$ revient à trouver toutes les fonctions φ dérivables sur J (avec $J \subset I$) vérifiant

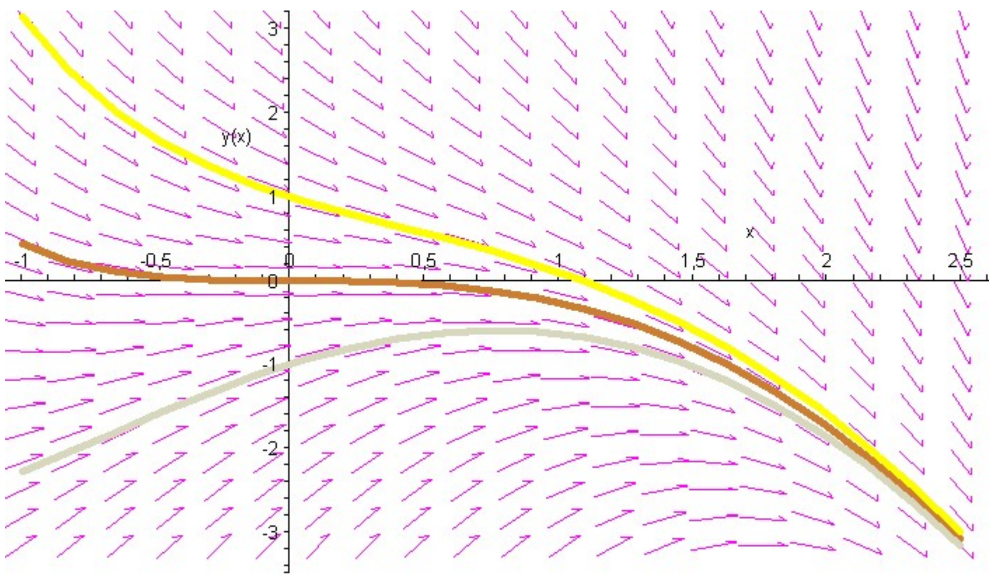
$$\forall t \in J, \qquad \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t)$$

Pour des raisons de commodité, on ne cherchera à déterminer que les solutions pour lesquelles J est le plus grand possible, toutes les autres n'étant que des restrictions de celles-ci. On parle alors de solutions maximales. Il s'agira ici de solutions définies sur l'intervalle I tout entier, voire $\mathbb{R}$.

Remarque 6.2.1 (interprétation Graphique) *Il s'agit de déterminer les graphes de fonctions où la tangente en chaque point de coordonnées (x_0, y_0) admet pour vecteur directeur $(1, b(x_0) - a(x_0)y_0)$. On parle alors de courbes intégrales associées à l'équation différentielle.* $*$

Remarque 6.2.2 *Si nous représentons l'ensemble des pentes des solutions de l'équation $y' = f(t, y)$, c'est à dire le champ de vecteurs $\overrightarrow{v}(1, f(x_0, y_0))$ on observe un profil semblable à celui d'une carte des courants maritimes, si l'on imagine une coquille de noix posée dans ce courant en (x_0, y_0) celle - ci suivra une trajectoire appelée ligne de courant et qui correspond à la courbe intégrale pour la condition initiale $y(x_0) = y_0$* $*$

Exemple: Voici trois lignes de courant pour l'équation $y' - y = -t^2$ (ici $f(t, y) = y - t^2$) et les conditions initiales respectives $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $y(0) = -1$



6.2.1 Equation Homogène associée

On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_0) \qquad y' + ay = 0$$

Proposition 6.2.1 *Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I. On note A une primitive de a. Alors si on note $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ l'ensemble des solutions sur I de $\mathcal{E}_0$, on a*

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}_0) = \{\varphi_\lambda ; \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Où pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, φ_λ est la fonction définie sur I par $\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda \exp[-A(t)]$ ♣

Démonstration Puisque par un calcul direct on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\exp[A(t)]\varphi(t)\right) = \exp[A(t)]\left(\varphi'(t) + a(t)\varphi(t)\right)$$

On voit que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_0) \Longleftrightarrow t \mapsto \exp[A(t)]\varphi(t) \text{ est constante sur } \mathbb{R}$$

•

Remarque 6.2.3 *l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire. En fait toute solution maximale n'est que le multiple d'une solution maximale particulière φ_1.*
On parle alors de droite vectorielle des solutions de $(\mathcal{E}_0)$, on note parfois

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}_0) = \mathbb{K}\varphi_1$$

∗

6.2.2 Equations linéaires d'ordre 1 (résolues) avec second membre

Notons $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation avec second membre $(\mathcal{E})$.

Proposition 6.2.2 *Soit $(\mathcal{E})$ tel que ci-dessus.*
L'équation $(\mathcal{E})$ admet au moins une solution ψ_0 sur I.
Plus précisément on a

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \{\psi_0 + \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_0)\}$$

♣

Démonstration cherchons une solution particulière ψ_0, pour cela raisonnons par conditions nécessaires. On sait que les fonctions de la forme $\psi_0 = \lambda\varphi_1$ sont solutions de $\mathcal{E}_0$ lorsque λ est une constante fixée dans $\mathbb{K}$. Supposons à présent que λ puisse varier, c'est à dire que $\lambda : I \to \mathbb{K}$ soit une fonction dérivable (tant qu'à faire). Et cherchons une solution particulière sous la forme

$$\psi_0 = \lambda\varphi_1$$

En toute rigueur, puisque l'on raisonne par conditions nécessaires, on a $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ donné et on pose

$$\forall t \in I, \qquad \lambda(t) = \exp[A(t)]\psi_0(t)$$

ce qui prouve que λ est bien définie et dérivable sur I. On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}) &\Longrightarrow \psi_0' + a\psi_0 = b \\ &\Longrightarrow \lambda'\varphi_1 + \underbrace{\lambda\varphi_1' + a\lambda\varphi_1}_{0} = b \\ &\Longrightarrow \forall t \in I, \qquad \lambda'(t) = b(t)\exp[A(t)] \end{aligned}$$

Ce raisonnement par conditions nécessaires, est en fait un raisonnement par équivalences. Ainsi si on pose Λ une primitive de $t \mapsto b(t)\exp[A(t)]$ alors $\psi_0 \overset{def}{=} \Lambda\varphi_1$ est une solution particulière.

A présent que l'on connaît une solution particulière ψ_0 on peut déterminer grâce à celle-ci toutes les solutions de $\mathcal{E}$. En effet :

$$\begin{aligned} \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{E}) &\Longleftrightarrow \psi' + a\psi = b \\ &\Longleftrightarrow \psi' + a\psi = \psi_0' + a\psi_0 \\ &\Longleftrightarrow (\psi - \psi_0)' + a(\psi - \psi_0) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \psi - \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_0) \end{aligned}$$

•

Remarque 6.2.4 *On note parfois par analogie avec la géométrie*

$$\mathcal{S}(E) = \psi_0 + \mathcal{S}(\mathcal{E}_0) \quad ou \quad \mathcal{S}(E) = \psi_0 + \mathbb{K}\varphi_1$$

où φ_1 est une solution maximale non nulle de $\mathcal{E}_0$, et ψ_0 une solution particulière de $\mathcal{E}$ $*$

Remarque: Ainsi résoudre une équation linéaire d'ordre 1 (résolue) consiste tout d'abord à résoudre l'équation homogène associée puis trouver une solution particulière (à l'aide par exemple de la méthode de la variation de la constante)

Proposition 6.2.3 *Soit $(\mathcal{E})$ tel que ci-dessus. Pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ il existe une unique solution φ de $(\mathcal{E})$ vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$.*
On dit alors que le problème de Cauchy associé à $y' + a(t)y = b(t)$ pour la condition initiale $y(t_0) = y_0$ est bien posé ♣

Preuve Nous savons que les solutions de $\mathcal{E}$ sur I s'écrivent

$$\psi(t) \stackrel{def}{=} \psi_0(t) + \lambda \exp[-A(t)]$$

avec A une primitive de a, ψ_0 une solution particulière et $\lambda \in \mathbb{K}$ une constante. Dire que cette solution est une solution au problème de Cauchy posé dans l'énoncé équivaut à

$$\psi_0(t_0) + \lambda \exp[-A(t_0)] = y_0$$

ce qui équivaut encore à

$$\lambda = (y_0 - \psi_0(t_0)) \exp[A(t_0)]$$

Or ceci détermine de façon unique la solution au problème de Cauchy annoncé.

•

Remarque 6.2.5 *Ceci signifie que par tout point (t_0, y_0) passe une et une seule courbe intégrale.*
Les courbes intégrales forment ce qu'on appelle une partition de la région du plan $I \times \mathbb{K}$ $*$

Exercice: ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Dans un circuit RC et éventuellement générateur tension U,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U$$

avec $U(t) = 0$ (Equation homogène solution générale)

avec $U(t) = constante = U_0$ (solution particulière)

avec $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$

Cette équation en q correspond à l'équation en y

$$y' + \frac{1}{\tau}y = I(t)$$

avec $y = q$ $I = \frac{CU}{\tau}$ et $\tau = RC$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(t) = \lambda \exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière étant CU_0 on a les solutions générales de l'équation avec second membre constant

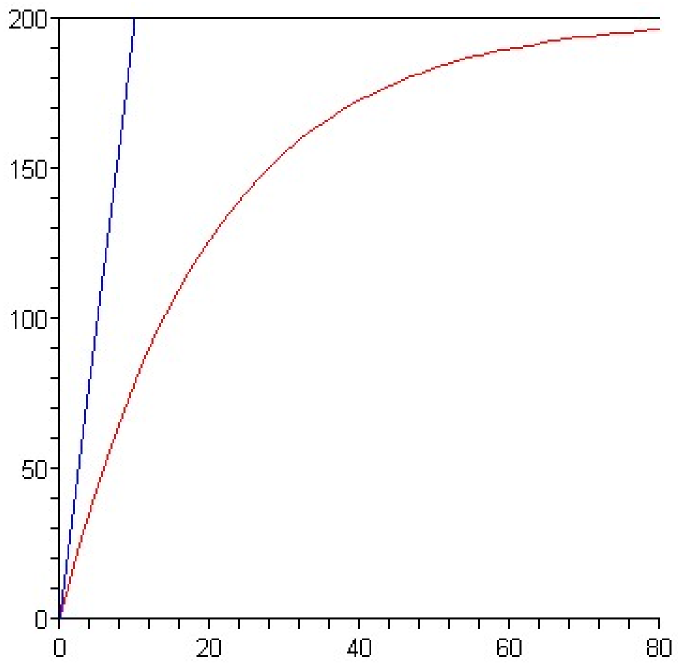
$$y(t) = CU_0 + \lambda \exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Regardons le problème de Cauchy correspondant $q(0) = 0$.

on a alors dans le premier cas (fem constante)

$$q(t) = CU_0(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

Ce phénomène non instantannée d'où la constante de temps τ, en fait il s'agit d'un régime transitoire (la charge) qui tend vers le régime permanent (ici le condensateur chargé à CU_0)



Regardons dans le cas d'un régime forcé par une tension sinusoïdale, La méthode de la variation de la constante nous permet d'obtenir une solution particulière lorsque la tension aux bornes du générateur est sinusoïdale.

Cherchons une solution particulière sous la forme $\lambda(t)\exp(-\frac{t}{\tau})$ dire que celle-ci est une solution particulière équivaut à

$$\lambda'(t)\exp(-\frac{t}{\tau}) - \frac{\lambda(t)}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau}) + \frac{1}{\tau}\lambda(t)\exp(-\frac{t}{\tau}) = \frac{CU_0}{\tau}\sin(\omega t)$$

Ce qui équivaut encore à

$$\lambda'(t) = \frac{CU_0}{\tau}\sin(\omega t)\exp(\frac{t}{\tau})$$

Soit

$$\lambda'(t) = Im\left(\frac{CU_0}{\tau}\exp(\frac{1}{\tau}+i\omega)t\right) = Im\left(\frac{CU_0}{\tau}\frac{d}{dt}\left[\frac{\exp(\frac{1}{\tau}+i\omega)t}{\frac{1}{\tau}+i\omega}\right]\right) = \frac{d}{dt}\left[Im\left(\frac{CU_0}{1+i\omega\tau}\exp(\frac{1}{\tau}+i\omega)t\right)\right]$$

D'où une solution particulière

$$Im\left(\frac{CU_0}{1+i\omega\tau}\exp(\frac{1}{\tau}+i\omega)t\right)\exp(-\frac{t}{\tau}) = \frac{CU_0}{1+\omega^2\tau^2}Im\left((1-i\omega\tau)\exp(i\omega t)\right) = \frac{CU_0}{1+\omega^2\tau^2}\left(\sin(\omega t) - \omega\tau\cos(\omega t)\right)$$

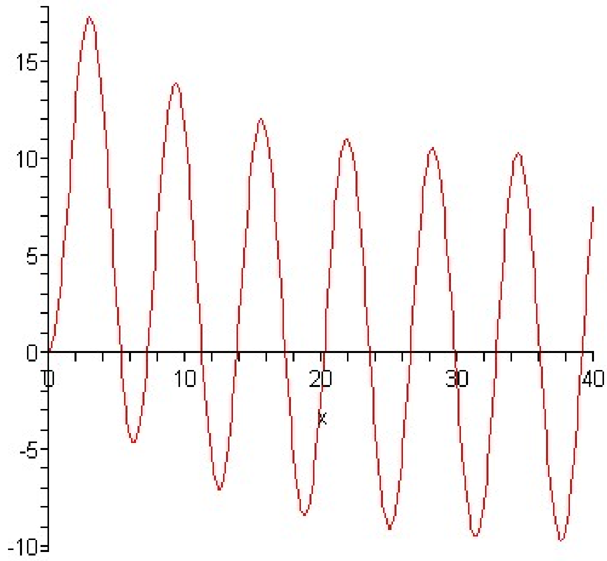
En particulier si γ est un argument de $1+i\omega\tau$

$$y(t) = \frac{CU_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega t-\gamma) + \lambda\exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

On voit apparaître deux régimes :
Un régime transitoire (ou régime propre) pendant lequel le condensateur se charge initialement (solution de l'équation homogène).
Et de facon prépondérante après un certain temps, un régime permanent, c'est un le régime sinusoïdal forcé par la fem, ainsi on voit apparaître une succession de charges et de décharges qui oscillent avec la même fréquence ω mais avec un retard de phase γ.

$$y(t) = \underbrace{\frac{CU_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega t-\gamma)}_{RegimePermanent} + \underbrace{\lambda\exp(-\frac{t}{\tau})}_{RegimeTransitoire} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro



Remarque 6.2.6 *Soient* $t_0 \in I$ *et* $t_1 \in I$

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}_0) = \left\{ x \mapsto \lambda \exp\left[-\int_{t_0}^{x} a(u)du \right]; \qquad \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \left\{ x \mapsto \left(\int_{t_1}^{x} b(t) \exp\left[\int_{t_0}^{t} a(u)du \right] dt + \lambda \right) \exp\left[-\int_{t_0}^{x} a(u)du \right]; \qquad \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

*

Proposition 6.2.4 *Lorsque le second membre de* $\mathcal{E}$ *s'écrit* $b = b_1 + b_2$ *avec* b_1 *et* b_2 *deux fonctions continues sur* I*, on a alors le principe de superposition suivant.*

Soient

$$(\mathcal{E}_1) \qquad y' + ay = b_1$$
$$(\mathcal{E}_2) \qquad y' + ay = b_2$$

Si ψ_1 *et* ψ_2 *sont respectivement deux solutions particulières de* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$*, alors* $\psi_1 + \psi_2$ *est une solution particulière de* $\mathcal{E}$*. En particulier*

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E}_1) + \mathcal{S}(\mathcal{E}_2) \overset{def}{=} \{\chi_1 + \chi_2; \quad \chi_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1) \quad et \quad \chi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_2)\}$$

♣

Exercice: le prouver

Exercice: Donner l'ensemble des solutions de

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_M \sin(\omega t) + U_0$$

Remarque: il est bien évident que l'on peut étendre cette proposition au cas où le second membre s'écrit comme la somme de trois ou plusieurs termes.

6.3 Méthode d'Euler

Pour résoudre explicitement des équations différentielles du premier ordre il est nécessaire de savoir primitiver, or cette opération n'est pas toujours simple voire peu explicite.

Il existe un moyen peu coûteux et relativement simple pour résoudre une équation différentielle du premier ordre

$$(\mathcal{F}) \qquad y' = f(t, y)$$

Où f est une fonction de deux variables $f : I \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ par exemple dans le cas qui nous occupe ici

$$\forall (t, z) \in I \times \mathbb{K}, \quad f(t, z) = b(t) - a(t)z$$

Bien entendu cet algorithme de calcul ne donne que des solutions approchées et repose donc sur une série d'approximations

La solution exacte y du problème de Cauchy associé à $(\mathcal{F})$ et à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ est "suffisamment régulière" pour que l'on puisse en première approximation , identifier la corde et la tangente entre deux instants "proches" avec la courbe elle même. De même f est supposée varier peu par rapport à sa deuxième composante.

Une fois cette approximation faite nous allons calculer de proche en proche et de façon approchée les valeurs de la fonction solution en des instants $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. On notera z la solution approchée ainsi calculée.

Nous allons prendre des instants successifs $t_0, t_1 = t_0 + \delta, t_2 = t_1 + \delta, ...$ en "quantité fini ou infinie N"

$$\forall j \in [\![0, N[\![, \qquad t_j \overset{def}{=} t_0 + j\delta$$

CHOIX de δ :
δ devra être choisi suffisamment petit pour pouvoir appliquer l'approximation annoncée. Remarquons également que plus δ est petit plus l'on pourra calculer de valeurs de f en différents instants ce qui nous donnera une meilleure information de la solution que l'on cherche à approcher.

Notations.

Posons $e_0, e_1, ..., e_n, ...$ les valeurs prises par la solution exactes aux différents instants $t_0, t_1, ..., t_n, ...$

$$\forall j \in [\![0, N[\![, \qquad e_j \overset{def}{=} y(t_j)$$

On notera $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ les valeurs approchées calculées que nous donne la méthode d'Euler aux différents instants $t_0, t_1, ..., t_n, ...$

$$\forall j \in [\![0, N[\![, \qquad a_j \overset{def}{=} z(t_j)$$

Ainsi l'équation $\mathcal{F}$ s'écrit aux différents instants

$$\forall j \in [\![0, N[\![, \qquad y'(t_j) = f(t_j, e_j)$$

Notons $A_j(t_j, a_j)$ et $E_j(t_j, e_j)$ A_0 est simple a placer puisqu'il est donné par le problème de Cauchy $a_0 = y_0$:

$$A_0(t_0, y_0)$$

Supposons avoir construit de proche en proche les points $A_0, \ldots, A_n$ (avec $n \geq 0$) Nous allons construire A_{n+1}.

D'après l'approximation on a que la corde $(E_n E_{n+1})$ est proche de la tangente issue de E_n en particulier leurs coefficients directeurs le sont

$$\frac{e_{n+1} - e_n}{\delta} \simeq f(t_n, e_n)$$

On considère alors l'égalité associée non pas aux valeurs exactes mais aux valeurs approchées

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\delta} = f(t_n, a_n)$$

Ainsi

$$a_{n+1} = a_n + \delta f(t_n, a_n)$$

On construit ainsi les points $A_0, \ldots, A_n$ de proche en proche à l'aide de la relation de récurrence

$$\forall j \in [\![0, N[\![, \qquad a_{j+1} = a_j + \delta f(t_j, a_j)$$

Et puisque la courbe intégrale est supposée proche de ses cordes, on construit le graphe de la solution approchée en reliant les points successifs $A_0, .., A_n, ...$ par des segments.

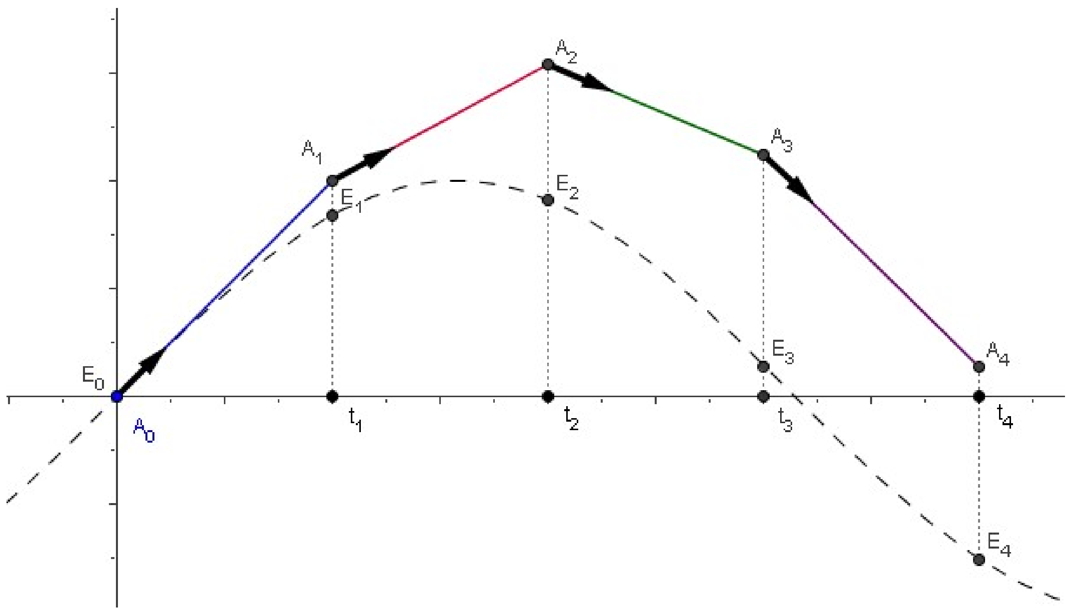
Remarque: Plaçons les points A_j sur le plan à l'aide du champ de vecteurs donné par f. On construit la courbe intégrale par des lancés de cailloux successifs et proches. Partant d'un point A_j on lance le caillou dans la direction donnée par le vecteur $(1, f(t_j, a_j))$ puis on recommence à partir de la position atteinte au bout d'un temps δ par le caillou.
La courbe intégrale approchée est alors donnée par la courbe reliant par des segments successifs les points $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$

Exemple: Regardons le problème de Cauchy

$$y' = \cos(t) \qquad \text{et} \qquad y(0) = 0$$

Ici $f(t, y) = \cos(t)$, $y_0 = 0$ et $t_0 = 0$.
Construisons une solution approchée à l'aide de 5 points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 (ici $N = 5$) calculés pour les instants $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ et $t_4 = 4$ (ici $\delta = 1$), on a alors la solution graphique ci-dessous où l'on passe de A_i à A_{i+1} grâce au champ de vecteurs associé à l'équation différentielle.
Par exemple en A_0 la direction est donnée par le vecteur $(1, f(t_0, y_0))$, c'est à dire ici $(1, 1)$, ce qui nous permet d'obtenir le point A_1 qui se trouve dans cette direction δ instants plus tard, ici $A_1(1, 1)$. Et ainsi de suite on parvient jusqu'au point A_4. la suite des valeurs approchées vaut ici

$$\forall k \in [|0, 3|], \qquad a_{k+1} = a_k + \cos(k) \qquad \text{et} \qquad a_0 = 0$$



Exercice: appliqué la méthode d'Euler à l'équation $y' = y$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$ et comme pas $\delta = 1$.
Solution :
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n$, la méthode d'Euler nous donne la suite de valeurs approchées suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_{k+1} = 2a_k \qquad \text{et} \qquad a_0 = 1$$

On reconnaît là la suite géométrique de raison 2 de premier terme 1, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n$$

Remarque: Cette méthode nous donne une solution approchée sur un intervalle du type $< t_0, T >$ pour connaître une solution approchée à gauche de t_0 il suffit de reproduire cet algorithme pour des instants remontant le temps à partir de t_0

6.4 Equations Linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse dans cette section à toute équation différentielle du type (avec un léger abus de notation)

$$(\mathcal{G}) \qquad ay'' + by' + cy = f(t)$$

où a, b, c sont des constantes complexes avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. (I est un intervalle, le plus souvent $\mathbb{R}$)

On appelle polynôme caractéristique associé à $\mathcal{G}$ le polynôme du second degré

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Exercice: Montrer que lorsque $z : t \mapsto u(t)e^{\alpha t}$

$$az''(t) + bz'(t) + cz(t) = [P(\alpha)u(t) + P'(\alpha)u'(t) + au''(t)]e^{\alpha t}$$

6.4.1 Equation Homogène associée

Notons $\mathcal{G}_0$ l'équation homogène associée

$$(\mathcal{G}_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

Et notons $\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$ l'ensemble des solutions sur I.

Proposition 6.4.1 *Soit Δ le discriminant du polynôme caractéristique P. On note α_1 et α_2 les deux racines (distinctes ou pas) de P.*

Si $\Delta \neq 0$ **Alors** $\mathcal{S}(\mathcal{G}_0) = \left\{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t} \ \mid\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$

Si $\Delta = 0$ **Alors** $\mathcal{S}(\mathcal{G}_0) = \left\{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu t e^{\alpha_1 t} \ \mid\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$ ♣

Démonstration On a l'équivalence suivante

$$t \mapsto e^{\alpha t} \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0) \iff \forall t \in I, \quad P(\alpha)e^{\alpha t} = 0 \iff P(\alpha) = 0$$

d'où par linéarité de l'équation

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \qquad \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu t e^{\alpha_2 t} \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$$

Par ailleurs Dans le cas où $\Delta = 0$

$$t \mapsto te^{\alpha t} \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0) \iff \forall t \in I, \quad (P'(\alpha) + tP(\alpha))e^{\alpha t} = 0 \iff P(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P'(\alpha) = 0$$

Remarque: les racines doubles de P sont caractérisées par $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$

On a donc prouvé l'inclusion des ensembles proposés dans $\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$

Réciproquement soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$. Posons $\chi : t \mapsto e^{-\alpha_1 t}\psi(t)$, on a

$$\forall t \in I, \qquad a\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\alpha_1 t}\chi(t)\right) + b\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha_1 t}\chi(t)\right) + ce^{\alpha_1 t}\chi(t) = 0$$

Soit $P(\alpha_1)\chi(t) + a[\chi''(t) + (2\alpha_1 + \frac{b}{a})\chi'(t)] = 0$
Or α_1 étant une racine de P : $P(\alpha_1) = 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$.
on en déduit que χ' vérifie l'équation différentielle linéaire résolue homogène du premier ordre

$$y' + (\alpha_1 - \alpha_2)y = 0$$

D'où $\quad \exists \nu \in \mathbb{C}; \qquad \forall t \in I, \qquad \chi'(t) = \nu e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}$

Et donc par primitivation :

• <u>Premier cas</u> $\Delta \neq 0$,
d'où $\quad \exists (\nu, \lambda) \in \mathbb{C}; \qquad \forall t \in I, \qquad \chi(t) = \frac{\nu}{\alpha_2 - \alpha_1}e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \lambda$

Et donc $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C};\quad \forall t\in I,\quad \psi(t)=\lambda e^{\alpha_1 t}+\mu e^{\alpha_2 t}$

• <u>Deuxième cas</u> $\Delta=0$,
d'où $\exists(\nu,\mu)\in\mathbb{C};\quad \forall t\in I,\quad \chi(t)=\nu t+\mu$
Et donc $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C};\quad \forall t\in I,\quad \psi(t)=\lambda e^{\alpha_1 t}+\mu t e^{\alpha_1 t}$

•

Remarque 6.4.1 *Lorsque a,b,c sont réels et que l'on cherche les solutions réelles de $\mathcal{G}_0$, on peut écrire dans le cas où $\Delta<0$*

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)=\left\{t\mapsto e^{\beta t}(\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t))\ \mid\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{t\mapsto Ke^{\beta t}\cos(\omega t+\gamma)\ \mid\ (K,\gamma)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

où $\alpha_1=\overline{\alpha_2}=\beta+i\omega$ est l'écriture cartésienne des racines de P $*$

Preuve Dans le cas où $\Delta<0$, les solutions s'écrivent

$$y(t)=e^{\beta t}\left(Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\right)\qquad \text{avec}(A,B)\in\mathbb{C}$$

Puisque $\forall t\in I, y(t)\in\mathbb{R}$, on a pour tout $t\in I$:

$$\overline{Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}}=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$$

Ce qui équivaut à $\bar{A}e^{-i\omega t}+\bar{B}e^{i\omega t}=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$.
D'où $\forall t\in I,\quad (\bar{B}-A)e^{i\omega t}=\overline{(\bar{B}-A)e^{i\omega t}}$. soit encore $\forall t\in I,\quad (\bar{B}-A)e^{i\omega t}\in\mathbb{R}$.
Ceci implique en particulier que $(\bar{B}-A)=0$
car dans le cas contraire les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectives $e^{i\omega t}$ et $\frac{1}{\bar{B}-A}$ seraient colinéaires pour tout $t\in I$, ce qui revient à dire que $\overrightarrow{v}$ est de direction constante, ce qui est absurde I n'étant pas réduit à un point.
En conclusion on a $y(t)=e^{\beta t}Re\left(Ae^{i\omega t}\right)$ avec $A\in\mathbb{C}$.
On conclut grâce à l'écriture cartésienne et trigonométrique de A

$$A=\lambda-i\mu=Ke^{i\gamma}$$

•

Remarque 6.4.2 *l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire. En fait toute solution sur I est combinaison linéaire des deux solutions indépendantes $\sigma_1:t\mapsto e^{\alpha_1 t}$ et $\sigma_2:t\mapsto e^{\alpha_2 t}$ (resp. $\varrho:t\mapsto te^{\alpha_1 t}$).*
On parle alors de plan vectoriel des solutions de $(\mathcal{G}_0)$, on note parfois

$$\textbf{Si }\Delta\neq 0\textbf{Alors }\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)=\mathbb{C}\sigma_1+\mathbb{C}\sigma_2$$

$$\textbf{Si }\Delta=0\textbf{Alors }\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)=\mathbb{C}\sigma_1+\mathbb{C}\varrho$$

$*$

Exemple: On s'intéresse cette fois-ci à un circuit RLC, la charge aux bornes du condensateur est régie par l'équation

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

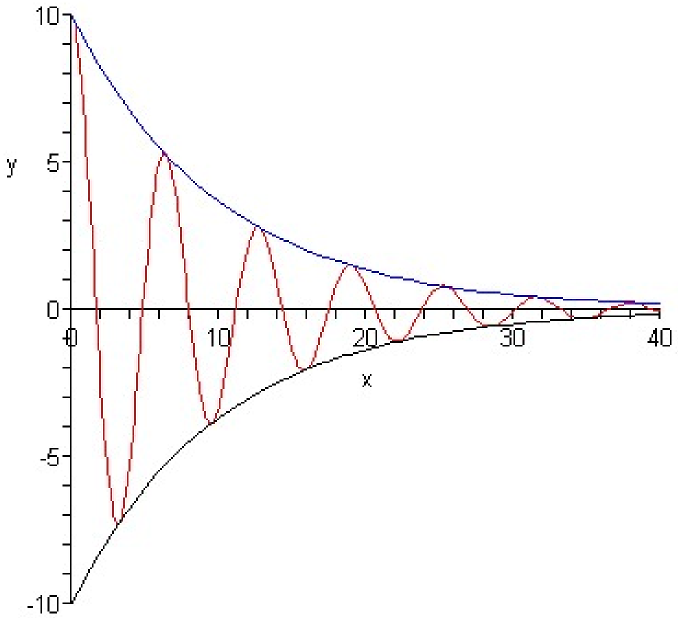
Cette équation se réécrit

$$\frac{1}{\omega_0^2}y''+\frac{2\xi}{\omega_0}y'+y=0$$

avec $y=q$, $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (pulsation propre)et $\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ (coefficient d'amortissement réduit)

Dans le cas où $R^2<\frac{4L}{C}$ (i.e. $\xi<1$).
Le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha_1=-\lambda+i\omega$ et $\alpha_2=-\lambda-i\omega$.
D'où les solutions générales réelles qui sont de la forme

$$y(t)=K\underbrace{e^{-\lambda t}}_{amortissement}\underbrace{\sin(\omega t-\gamma)}_{oscillation}\qquad \text{avec }(\lambda,\gamma)\in\mathbb{R}^2$$



C'est ce qu'on appelle un régime oscillant amorti (ici on a pris $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$).
La fréquence d'oscillation ω est définie par $\omega^2 = \omega_0^2 - \xi^2$ et le coefficient d'amortissment par $\lambda = \xi\omega_0$

6.4.2 Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

Notons $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation avec second membre $(\mathcal{G})$.

Proposition 6.4.2 *Soit $(\mathcal{G})$ tel que ci-dessus.*
L'équation $(\mathcal{G})$ admet au moins une solution ψ_0 sur I.
Plus précisément on a

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \{\psi_0 + \varphi; \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0)\}$$

♣

Démonstration cherchons une solution particulière ψ_0, pour cela raisonnons par conditions nécessaires. On sait que les fonctions de la forme $\psi_0 = \lambda\sigma_1$ sont solutions de $\mathcal{G}_0$ lorsque λ est une constante fixée dans $\mathbb{C}$. Supposons à présent que λ puisse varier, c'est à dire que $\lambda : I \to \mathbb{C}$ soit une fonction dérivable (tant qu'à faire). Et cherchons une solution particulière sous la forme

$$\psi_0 = \lambda\sigma_1$$

En toute rigueur, puisque l'on raisonne par conditions nécessaires, on a $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ donné et on pose

$$\forall t \in I, \qquad \lambda(t) = \exp[-\alpha_1 t]\psi_0(t)$$

ce qui prouve que λ est bien définie et dérivable sur I. On a alors d'après les calculs précédents

$$\lambda''(t) + (2\alpha_1 + \frac{b}{a})\lambda'(t) = \frac{f(t)}{a}$$

Et donc λ' vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre, et par primitivation de cette solution on obtient une fonction λ qui devrait convenir... En effet cette fonction λ vérifie par construction

$$\lambda''(t) + (2\alpha_1 + \frac{b}{a})\lambda'(t) = \frac{f(t)}{a}$$

Et donc

$$\forall t \in I, \qquad a\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\alpha_1 t}\lambda(t)\right) + b\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha_1 t}\lambda(t)\right) + ce^{\alpha_1 t}\lambda(t) = P(\alpha_1)\lambda(t) + a[\lambda''(t) + (2\alpha_1 + \frac{b}{a})\lambda'(t)] = f(t)$$

Ainsi $\psi_0 = \lambda\sigma_1$ convient

A présent que l'on connaît une solution particulière ψ_0 on peut déterminer grâce à celle-ci toutes les solutions de $\mathcal{G}$. En effet :

$$\begin{aligned} \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}) &\iff a\psi'' + b\psi' + c\psi = f \\ &\iff a\psi'' + b\psi' + c\psi = a\psi_0'' + b\psi_0' + c\psi_0 \\ &\iff a(\psi - \psi_0)'' + b(\psi - \psi_0)' + c(\psi - \psi_0) = 0 \\ &\iff \psi - \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_0) \end{aligned}$$

•

Remarque 6.4.3 *On note parfois par analogie avec la géométrie*

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \psi_0 + \mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$$

où ψ_0 une solution particulière de $\mathcal{G}$ ∗

Remarque: Ainsi résoudre une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants consiste tout d'abord à résoudre l'équation homogène à l'aide des racines du polynôme caractéristiques associée puis trouver une solution particulière (à l'aide par exemple de la méthode de la variation de la constante)

Proposition 6.4.3 *Soit $(\mathcal{G})$ tel que ci-dessus. Pour tout triplet $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ il existe une unique solution φ de $(\mathcal{G})$ vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = v_0$.*
On dit alors que le problème de Cauchy associé à $ay'' + by' + cy = f(t)$ pour la condition initiale $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$admet une unique solution ♣

Preuve Nous ne traitons que le cas $\Delta \neq 0$ le cas $\Delta = 0$ est laissé en exercice.
Nous savons que les solutions de $\mathcal{G}$ sur I s'écrivent

$$\psi(t) \overset{def}{=} \psi_0(t) + \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t}$$

Où ψ_0 est une solution particulière et λ, μ sont des constantes. Dire que cette solution est une solution au problème de Cauchy posé dans l'énoncé équivaut à

$$\begin{cases} \psi_0(t_0) + \lambda e^{\alpha_1 t_0} + \mu e^{\alpha_2 t_0} &= y_0 \\ \psi_0'(t_0) + \alpha_1 \lambda e^{\alpha_1 t_0} + \alpha_2 \mu e^{\alpha_2 t_0} &= v_0 \end{cases}$$

ce qui équivaut encore à

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 t_0}\lambda + e^{\alpha_2 t_0}\mu = y_0 - \psi_0(t_0) \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0}\lambda + \alpha_2 e^{\alpha_2 t_0}\mu = v_0 - \psi_0'(t_0) \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t_0} & e^{\alpha_2 t_0} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t_0} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) t_0} \neq 0$$

Ce système est donc de Cramer, ce qui détermine de façon unique le couple solution (λ, μ) et par voie de conséquence ceci détermine de façon unique la solution au problème de Cauchy annoncé.

•

Remarque 6.4.4 *Ceci signifie que par tout point (t_0, y_0, v_0) passe une et une seule courbe intégrale. Les courbes intégrales forment ce qu'on appelle une partition de la région de l'espace $I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$* ∗

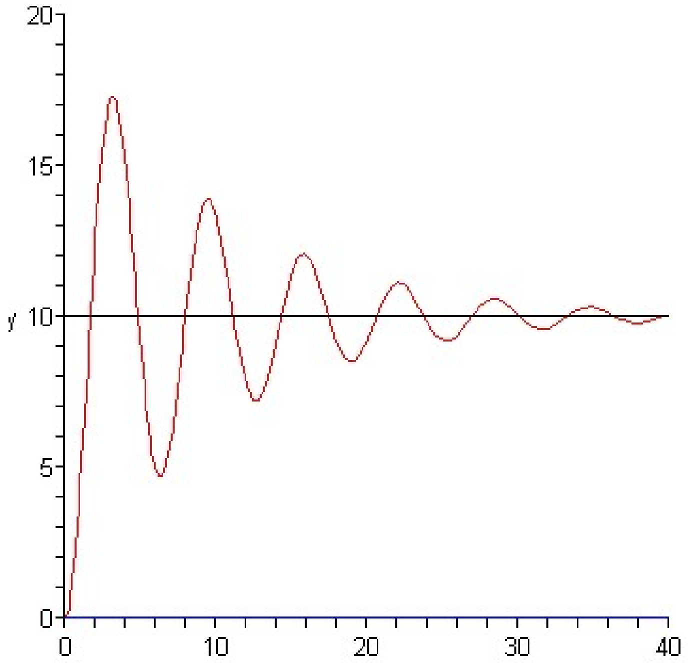
Exercice: Résoudre l'équation différentielle que régie la charge d'un condensateur dans un circuit RLC (avec $R^2 < \frac{4L}{C}$) soumis à une tension échelon U_0 puis à une fem sinusoïdale $U_0 \sin(\Omega t)$ pour le problème de Cauchy

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{avec } q(0) = 0 \quad \text{et} \quad q'(0) = 0$$

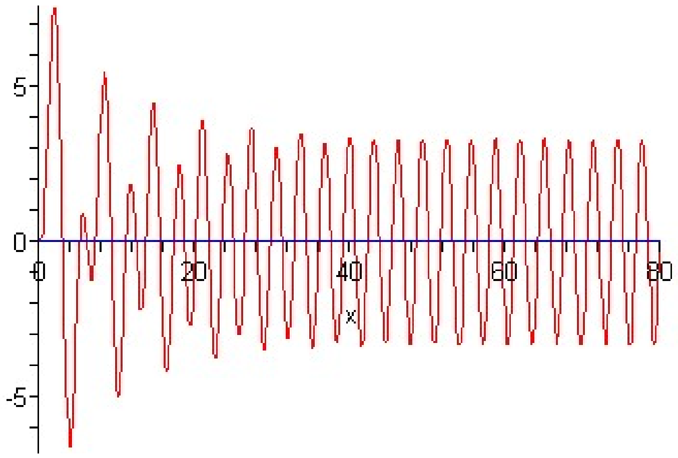
Ce qui se réécrit

$$\frac{1}{\omega_0^2}y'' + \frac{2\xi}{\omega_0}y' + y = 0 \qquad \text{avec } y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0$$

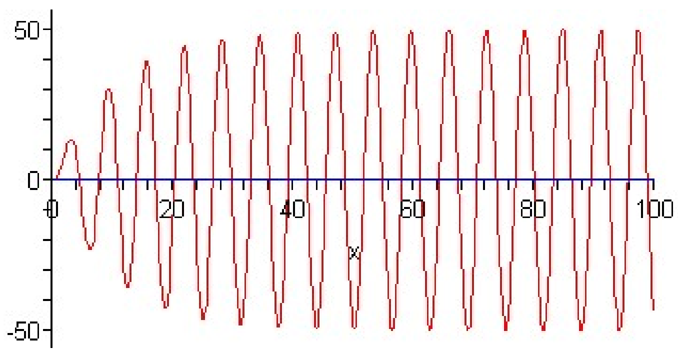
Dans le premier cas $q(t) = CU_0\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$.



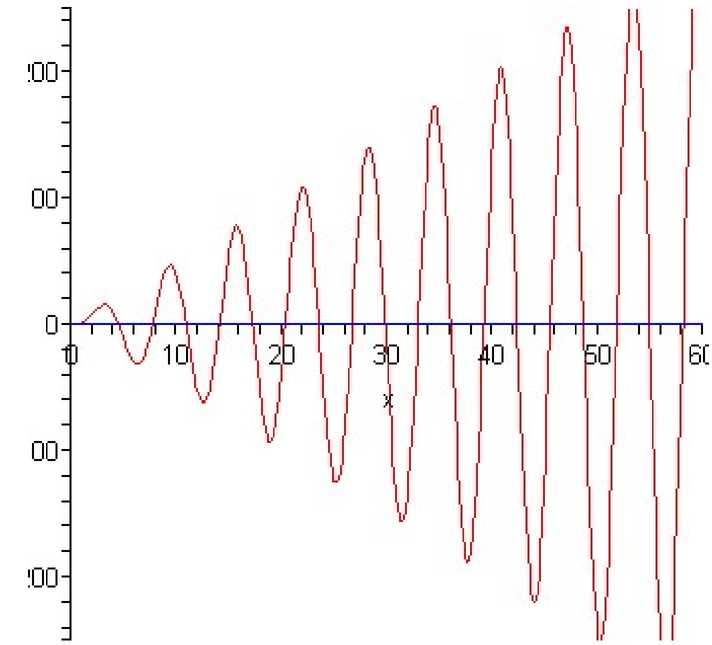
Dans le deuxième cas : pour $\Omega = 2\omega_0$



Pour $\Omega = \omega_0$ (Résonance) l'amplitude de q est maximale lorsque le circuit est excité avec la pulsation propre.



Dans le cas $R = 0$ ($\xi = 0$), on n'a plus d'effet d'amortissement (il n'y a plus de dissipation de l'énergie par effet Joule) et donc l'amplitude de la charge augmente indéfiniment



Remarque: Le phénomène de résonance s'illustre parfaitement avec le jeu de la balançoire.
En effet pour donner le maximum d'amplitude à notre petit frère se balançant sur une balançoire, il suffit de le "balancer" avec la même fréquence que la fréquence propre du système {balançoire, petit frère} et ce quel que soit la force avec laquelle on le "balance".

Proposition 6.4.4 *Lorsque le second membre de $\mathcal{E}$ s'écrit $f = f_1 + f_2$ avec f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I, on a alors le principe de superposition suivant.*

Soient

$$(\mathcal{G}_1) \qquad ay'' + by' + cy = f_1$$
$$(\mathcal{G}_2) \qquad ay'' + by' + cy = f_2$$

Si ψ_1 et ψ_2 sont respectivement deux solutions particulières de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, alors $\psi_1 + \psi_2$ est une solution particulière de $\mathcal{E}$. En particulier

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{S}(\mathcal{G}_1) + \mathcal{S}(\mathcal{G}_2) \overset{def}{=} \{\chi_1 + \chi_2; \quad \chi_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_1) \quad et \quad \chi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_2)\}$$

♣

Exercice: le prouver

Remarque: il est bien évident que l'on peut étendre cette proposition au cas où le second membre s'écrit comme la somme de trois ou plusieurs termes.

Proposition 6.4.5 *Dans le cas où $f : t \mapsto e^{\beta t} R(t)$, avec $\beta \in \mathbb{C}$ et R une fonction polynômiale de degré n, on cherche une solution particulière sous la forme*

$$\psi_0 : t \mapsto e^{\beta t} Q(t)$$

Où Q est polynômiale de degré

$$d(Q) = \begin{cases} n & \textbf{Si} \quad \beta \textit{ n'est pas une racine de } P \\ n+1 & \textbf{Si} \quad \beta \textit{ est une racine simple de } P \\ n+2 & \textbf{Si} \quad \beta \textit{ est une racine double de } P \end{cases}$$

♣

Preuve $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad a\psi_0'' + b\psi_0' + c\psi_0 = P(\beta)Q(t)e^{\beta t} + aQ''(t)e^{\beta t} + P'(\beta)Q'(t)e^{\beta t} = e^{\beta t} R(t)$$

ce qui équivaut à

$$\forall t \in I, \qquad P(\beta)Q(t) + aQ''(t) + P'(\beta)Q'(t) = R(t)$$

ce qui équivaut à l'égalité des polynômes (puisqu'ils ont une infinité de racines en commun) Et donc par identification des coefficients on obtient l'expression de Q, ceci est possible à condition de prendre pour Q le bon degré, or

$$d(P(\beta)Q + aQ'' + P'(\beta)Q') = \begin{cases} d(Q) & \textbf{Si} \quad P(\beta) \neq 0 \\ d(Q) - 1 & \textbf{Si} \quad P(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad P'(\beta) \neq 0 \\ d(Q) - 2 & \textbf{Si} \quad P(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad P'(\beta) = 0 \end{cases}$$

Finalement Q est déterminé par ses coefficients, ce qui par identification revient à résoudre un système échelonné où l'on trouve de proche en proche les coefficients de Q en commençant par le coefficient de plus haut degré. •

Exercice: Résoudre

$$y'' + 2y' + y = e^t + (1 + t^2)e^{-t}$$

Remarque: si $EDO := \mathrm{diff}(y(t), t) + a(t) * y(t) = b(t)$ la commande

$$\mathrm{dsolve}(EDO, y(t))$$

résout formmellement l'équation EDO

$$\mathrm{dsolve}(\{EDO, y(0) = 1\}, y(t))$$

résout le problème de Cauchy associé aux conditions initiales $y(0) = 1$.
Une manipulation similaire permet de résoudre les equations différentielles d'ordre 2