

# Table des matières

<b>7</b>	<b>Courbes Paramétrées</b>	<b>3</b>
7.1	Dérivations de fonctions vectorielles . . . . .	3
7.2	Courbe définie par une représentation paramétrique . . . . .	5
7.2.1	Définitions . . . . .	5
7.2.2	Points Réguliers et Tangentes . . . . .	5
7.2.3	Interprétation Cinématique . . . . .	6
7.2.4	Symétries et Périodicités . . . . .	7
7.2.5	Branches Infinies . . . . .	8
7.2.6	Plan d'Etude d'une courbe paramétrée . . . . .	11
7.3	Courbes en coordonnées Polaires . . . . .	12
7.3.1	Définition . . . . .	12
7.3.2	Vitesse et Accélération . . . . .	12
7.4	Courbes polaires paramétrées par l'angle polaire . . . . .	12
7.4.1	Tangentes et Normales . . . . .	13
7.4.2	Symétries . . . . .	14
7.4.3	Branches infinies . . . . .	16
7.4.4	Plan d'Etude d'une Courbe Polaire . . . . .	17



# Chapitre 7

## Courbes Paramétrées

Dans tout le chapitre on se place dans le plan euclidien  $\mathcal{P}$  muni d'un r.o.n.d.  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . A travers les coordonnées relatives à ce repère, on identifiera souvent  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{\mathcal{P}}$  et  $\mathbb{R}^2$ .

### 7.1 Dérivations de fonctions vectorielles

**Définition 7.1.1** Soit  $f : I \rightarrow \vec{\mathcal{P}}$  une fonction définie sur l'intervalle  $I = ]\alpha, \beta[$  et à valeurs vectorielles. lorsqu'elle existe on dira que  $f$  admet  $l \in \vec{\mathcal{P}}$  pour limite en  $\omega \in [\alpha, \beta]$  lorsque

$$\lim_{\omega} \|f - l\| = 0$$



**Remarque 7.1.1** On définit alors de façon analogue au cas réel la continuité, la dérivabilité et la dérivée des fonctions vectorielles :

$$f \text{ continue en } t_0 \iff \lim_{t_0} f = f(t_0)$$

$$f \text{ dérivable en } t_0 \text{ de dérivée } \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \ell$$

Et on note alors  $f'(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \ell$  (ou encore  $\frac{df}{dt}(t_0) = \ell$ )



**Proposition 7.1.1** Soit  $f : I \rightarrow \vec{\mathcal{P}}$ , on note  $x : I \rightarrow \mathbb{R}, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions coordonnées de  $f$  :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

On a alors  $f$  est continue (resp. dérivable) si et seulement si  $x$  et  $y$  le sont.

Dans le cas dérivable on a de plus

$$f'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}$$



**Exercice:** Comment se réécrit cette proposition dans le cas où l'on identifie  $\vec{\mathcal{P}}$  avec  $\mathbb{R}^2$ .  
Même question dans le cas où l'on identifie  $\vec{\mathcal{P}}$  avec  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 7.1.2** Etant donné un intervalle  $I$  et  $\mathcal{V} = \mathbb{R}$  (resp.  $\mathcal{V} = \vec{\mathcal{P}}$ ), on note :

$C^0(I, \mathcal{V})$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathcal{V}$ .

$C^1(I, \mathcal{V})$  l'ensemble des fonctions dérivables de  $C^0(I, \mathcal{V})$  dont la dérivée est continue sur  $I$

$C^2(I, \mathcal{V})$  l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de  $C^1(I, \mathcal{V})$  de dérivée seconde continue sur  $I$

Et par récurrence on définit pour  $k \geq 1$

$$f \in C^{k+1}(I, \mathcal{V}) \iff f' \in C^k(I, \mathcal{V})$$

On dit alors que  $f$  est de classe  $C^{k+1}$  sur  $I$



**Remarque 7.1.2** On a ainsi construit une suite décroissante d'ensembles :

$$C^0(I, \mathcal{V}) \supset C^1(I, \mathcal{V}) \supset \dots \supset C^k(I, \mathcal{V}) \supset C^{k+1}(I, \mathcal{V}) \supset \dots$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble d'arrivée on note  $C^k(I)$  au lieu de  $C^k(I, \mathcal{V})$  \*

**Proposition 7.1.2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions vectorielles de classe  $C^1$  sur  $I$ . Alors les fonctions définies sur  $I$  et à valeurs réelles  $(f|g)$  et  $\text{Det}(f, g)$  sont dérivables et

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

$$\left(\text{Det}(f|g)\right)' = \text{Det}(f', g) + \text{Det}(f, g')$$

♣

**Preuve** Dans  $\mathbb{R}$  notons  $x, y$  les fonctions coordonnées de  $f$  et  $u, v$  celles de  $g$ . Ces fonctions sont de classe  $C^1$  de plus

$$(f|g) = xu + yv \quad \text{et} \quad \text{Det}(f, g) = xv - yu$$

On en déduit la dérivabilité de ces deux fonctions et de plus

$$(f|g)' = x'u + ux' + y'v + yv' = (f'|g) + (f|g') \quad \text{et} \quad \left(\text{Det}(f|g)\right)' = x'v + xv' - y'u - yu' = \text{Det}(f', g) + \text{Det}(f, g')$$

•

**Remarque 7.1.3** Penser au théorème de dérivation d'un produit de fonctions dérivables. \*

**Corollaire 7.1.3** Soit  $f \in C^1(I, \overrightarrow{\mathcal{P}})$ , on a lors pour tout  $t_0 \in I$  tel que  $f(t_0) \neq \overrightarrow{0}$

$$\left(\|f\|\right)'(t_0) = \frac{(f'(t_0)|f(t_0))}{\|f(t_0)\|}$$

♣

**Preuve**  $\|f\|$  s'écrit comme la composée  $\varphi \circ \psi$  des fonctions suivantes

$$\varphi : t \mapsto \sqrt{t} \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto (f(t)|f(t))$$

D'où par le théorème de dérivation d'une composition :

$$\left(\|f\|\right)'(t_0) = \psi'(t) \times \varphi'(\psi(t)) = 2(f'(t_0)|f(t_0)) \times \frac{1}{2\sqrt{(f(t_0)|f(t_0))}}$$

•

**Exercice:** Dériver les fonctions suivantes (ici  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  est identifié à  $\mathbb{R}^2$ )

$$\overrightarrow{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \|\overrightarrow{u}\| \quad \text{et} \quad \text{Det}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$$

**Définition 7.1.3** Soit  $\Omega$  un point fixé dans  $\mathcal{P}$  et  $f : I \rightarrow \mathcal{P}$  une fonction à valeurs dans le plan (les images sont ici des points et non vecteurs). On note  $\psi_\Omega(t) = \overrightarrow{\Omega f(t)}$  On dit que  $f$  est continue (resp dérivable, resp. de classe  $C^k$ ) lorsque  $\psi_\Omega$  l'est.

Dans le cas dérivable on pose :

$$f' = \psi'_\Omega$$

♠

**Exercice:** montrer que cette définition est indépendante du choix de  $\Omega$

**Remarque:** Attention la dérivée d'une fonction vectorielle est une fonction vectorielle. Et la dérivée d'une fonction à valeurs ponctuelles est une fonction.... vectorielle!!! Si  $f : I \rightarrow \mathcal{P}$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{Of(t)}}{dt}$$

## 7.2 Courbe définie par une représentation paramétrique

Dans toute cette section  $I$  désigne un intervalle

### 7.2.1 Définitions

Soit  $\Gamma$  de représentation paramétrique relativement à  $\mathcal{R}$  en  $(X, Y)$

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

C'est à dire

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in I; M = f(t)\}$$

Où  $f$  est la fonction à valeurs ponctuelles définie par  $f : t \mapsto O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  et supposée de classe  $C^2$ .

Réciproquement on a la définition suivante

**Définition 7.2.1** Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathcal{P}$ .

$(I, f)$  est ce qu'on appelle la courbe paramétrée de classe  $C^2$  dont le support est  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in I; M = f(t)\}$$

$\Gamma$  est l'image directe de  $I$  par  $f$  ♠

**Remarque 7.2.1** On note parfois  $M(t)$  pour désigner  $f(t)$  ce qui nous donne

$$f : t \mapsto O + \overrightarrow{OM(t)}$$

et  $M(t)$  est le point de la courbe de paramètre  $t$  **FIGURE** \*

**Exemple:**  $(\mathbb{R}, t \mapsto O + t\vec{i} + 2t\vec{j})$  et  $(\mathbb{R}, t \mapsto O - t\vec{i} - 2t\vec{j})$  sont deux courbes paramétrées distinctes qui ont même support : la droite d'équation  $2x - y = 0$

**Exemple:**  $([0, 2\pi], t \mapsto O + \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j})$  et  $([0, 2\pi], t \mapsto O + \cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j})$  sont deux courbes paramétrées distinctes qui ont même support : le cercle unité

**Remarque 7.2.2** Soit  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle de classe  $C^2$ . le support de la courbe paramétrée  $(I, O + t\vec{i} + \phi(t)\vec{j})$  n'est rien d'autre que le graphe de  $\phi$ .

Par identification de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{P}$ , cela revient à dire que  $t \mapsto (t, \phi(t))$  est **une** paramétrisation sur  $I$  du graphe  $\phi$ .

De plus  $\phi$  et l'arc paramétré associé sont de même classe  $C^2$  \*

**Remarque 7.2.3** Dans MAPLE si  $f$  et  $g$  sont des fonctions fléchées, les commandes

$$\text{plot}([f, g, t1..t2]) \quad \text{ou} \quad \text{plot}([f(t), g(t), t = t1..t2])$$

permettent de tracer le support de la courbe paramétrée  $([t1, t2], (f, g)\mathcal{R})$  \*

### 7.2.2 Points Réguliers et Tangentes

**Définition 7.2.2** Soient  $(I, f)$  une courbe paramétrée de classe  $C^2$  et  $t_0 \in I$ . Le point  $M(t_0)$  de paramètre  $t_0$  est dit régulier lorsque  $f'(t_0) \neq 0$ . Dans le cas contraire on dit qu'il s'agit d'un point singulier ou stationnaire.

La courbe  $(I, f)$  est régulière lorsque tous ses points sont réguliers. ♠

**Exemple:** la courbe paramétrée  $(\mathbb{R}, f)$  avec  $f(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$  est régulière. En effet

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t) \neq (0, 0)$$

FIGURE

**Définition 7.2.3** Soit  $(I, f)$  une courbe paramétrée et  $M(t_0)$  un point de cette courbe. lorsqu'elle existe, on appelle tangente en  $M(t_0)$  à la courbe paramétrée  $(I, f)$  la droite

$$M(t_0) + \mathbb{R}\vec{d}_0$$

Où  $\vec{d}_0$  est la limite non nulle (lorsqu'elle existe) de  $\vec{d}(t)$  vecteur directeur de la corde  $(M(t_0)M(t))$  lorsque  $t$  tend vers  $t_0$  :

$$\vec{d}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{d}(t)$$

On définit de même les demi-tangentes à droite ou à gauche de  $t_0$ . (et non pas de  $M(t_0)$ ) ♠

**Exercice:** Cette définition est indépendante du choix de  $t \mapsto \vec{d}(t)$

**Proposition 7.2.1** En reprenant les notations de la définition, si  $M(t_0)$  est un point régulier de l'arc paramétré  $(I, f)$ , alors sa tangente en  $M(t_0)$  est la droite

$$M(t_0) + \mathbb{R}f'(t_0)$$

♣

**Preuve**  $\vec{d}(t) := \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t-t_0}$  admet pour limite  $f'(t_0) \neq 0$ . On conclut grâce au fait que pour  $t$  proche mais distinct de  $t_0$ ,  $d(t)$  est non nul et dirige  $(M(t)M(t_0))$ . •

**Exercice:** Calculer les tangentes de l'arc paramétré  $([0, 2\pi], t \mapsto (\cos t, \sin t)_{\mathcal{R}})$ . Que peut-on dire de ces droites relativement au cercle unité?

**Exercice:** Que dire de la tangente au point  $O$  de l'arc paramétré  $([0, 2\pi], t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)_{\mathcal{R}})$  ?

Attention  $O$  est point multiple ( $O$  a plusieurs antécédents  $t = \frac{\pi}{2}$  et  $t = \frac{3\pi}{2}$ ... dans le cas d'un seul antécédent on parle de point simple) Cette question n'a pas grand sens.

**Remarque 7.2.4** Soit  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. la tangente du graphe de  $\phi$  au point d'abscisse  $t_0$ , n'est rien d'autre que la tangente en  $M(t_0)$  de l'arc paramétré  $(I, t \mapsto (t, \phi(t))_{\mathcal{R}})$ . En particulier cette tangente admet pour vecteur directeur :  $\vec{v}(1, \phi'(t))_{\mathcal{R}}$  \*

**Proposition 7.2.2** Supposons  $f(t) = (x(t), y(t))$  et soit  $t_0 \in I$ . considérons la courbe paramétrée  $(I, f)$ .

**Si**  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m \in \mathbb{R}$  **Alors** au point  $M(t_0)$  la courbe admet une tangente de pente  $m$ .

**Si**  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \right| = +\infty$  **Alors** au point  $M(t_0)$  la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

♣

**Preuve** Posons  $\alpha : t \mapsto \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$  Dans le premier cas  $\vec{d}(t) = \vec{i} + \alpha(t)\vec{j}$  et  $d(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\vec{i} + \vec{j}$  dans le deuxième, sont des vecteurs directeurs des cordes  $(M(t)M(t_0))$  pour  $t$  proche (mais distinct de  $t_0$ ). D'où par passage à la limite :  $\vec{i} + m\vec{j}$  resp.  $\vec{j}$  dirigent la tangente en  $M(t_0)$  •

### 7.2.3 Interprétation Cinématique

L'étude de la courbe paramétrée  $(I, f)$  correspond à l'étude cinématique d'un point mobile dont la position  $M(t)$  dépende du temps  $t \in I$ .

$f'(t) = \frac{dM(t)}{dt}$  est le vecteur vitesse instantanée du point  $M$  à l'instant  $t$ .

$f''(t) = \frac{d^2 M(t)}{dt^2}$  est le vecteur accélération du point  $M$  à l'instant  $t$ .

Le support  $\Gamma$  n'est rien d'autre que la trajectoire suivie par  $M$  au cours du temps.

**Exercice:** Calculer la vitesse et l'accélération d'un mobile  $M$  dont la position au cours du temps est donné par  $M(\cos t, \sin t)$ .

### 7.2.4 Symétries et Périodicités

Soit  $(I, f)$  une courbe paramétrée avec  $I = ]a, b[$  et  $f(t) = (x(t), y(t))$  (on identifie  $\mathcal{P}$  et  $\mathbb{R}^2$ ). On note  $\Gamma$  le support de cet arc. Et  $\Gamma|_J$  sa restriction à l'ensemble  $J$

$$\Gamma|_J \stackrel{def}{=} \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in J; M = f(t)\} = f(J)$$

**Proposition 7.2.3** Si  $x$  et  $y$  sont  $T$ -périodiques sur  $I$  alors

$$\Gamma = \Gamma|_{[a, a+T[}$$

on peut remplacer  $[a, a+T[$  par tout intervalle de longueur  $T$  ♣

Soit  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$  un nouveau paramétrage et  $J$  un sous-ensemble de  $I$  (si possible un intervalle) tels que

$$I = J \cup \psi(J)$$

**Exemple:** En choisissant de façon adaptée la nature des intervalles, on utilisera le plus souvent les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \psi : t &\mapsto -t & I = ]-a, a[ & \text{ et } J = [0, a[ \\ \psi : t &\mapsto a + b - t & I = ]a, b[ & \text{ et } J = ]a, \frac{a+b}{2}[ \\ \psi : t &\mapsto \frac{b-a}{2} + t & I = ]a, b[ & \text{ et } J = ]a, \frac{a+b}{2}] \\ \psi : t &\mapsto 1/t & I = ]0, +\infty[ & \text{ et } J = ]0, 1] \end{aligned}$$

**Proposition 7.2.4** Avec  $\psi$  et  $J$  tels que ci-dessus, soit  $S$  une transformation du plan :

**Si**  $f \circ \psi = S \circ f$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_J \cup S(\Gamma|_J)$ .

♣

**Preuve** Par construction  $I = J \cup \psi(J)$  on a donc en toute généralité  $\Gamma = \Gamma|_J \cup \Gamma|_{\psi(J)}$

D'où puisque et donc

$$\Gamma|_{\psi(J)} = f(\psi(J)) = (f \circ \psi)(J) = (S \circ f)(J) = S(f(J)) = S(\Gamma|_J)$$

Et on a donc bien

$$\Gamma = \Gamma|_J \cup S(\Gamma|_J)$$

**Remarque:** Ici on a commis un petit abus de notation car  $(f \circ \psi)$  est défini sur  $J$  alors que  $S \circ f$  est défini sur  $I$ , l'hypothèse signifie en fait

$$\forall t \in J, (f \circ \psi)(t) = (S \circ f)(t)$$

**Exemple:** Soient :

$T$  la translation de vecteur  $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$

$S_O$  la symétrie de centre  $O$

$S_{ord}$  la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses

$S_{absc}$  la symétrie par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées

$S_{biss}$  la symétrie par rapport à la première bissectrice parallèlement à la deuxième

**Proposition 7.2.5**

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J$$

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\psi(t)) = y(t) + \beta \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J \cup T(\Gamma|_J)$$

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J \cup S_O(\Gamma|_J)$$

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J \cup S_{ord}(\Gamma|_J)$$

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J \cup S_{absc}(\Gamma|_J)$$

$$\text{Si } \forall t \in I, \begin{cases} x(\psi(t)) = y(t) \\ y(\psi(t)) = x(t) \end{cases} \text{ Alors } \Gamma = \Gamma|_J \cup S_{biss}(\Gamma|_J)$$

Il suffit en fait de vérifier l'égalité des coordonnées pour  $t \in J$  ♣

**Preuve Si** les coordonnées de  $f$  vérifient l'hypothèse annoncée, **Alors**  $f \circ \psi = S \circ f$ , avec  $S$  la transformation associée

Attention dans le premier cas  $S = Id$  et donc  $\Gamma = \Gamma|_J \cup \Gamma|_J = \Gamma|_J$  •

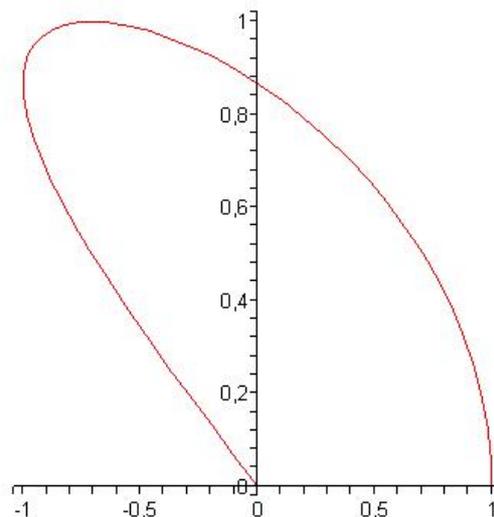
**Remarque:** On retrouve les symétries habituelles des graphes des fonctions, périodiques, resp. paires, resp. impaires.

**Exercice:** :

Caractériser le support  $\Gamma$  dans le cas où le changement de paramétrage  $\psi$  vérifie  $f \circ \psi = S \circ f$  où  $S$  est  $S_\Omega$  est la symétrie de centre  $\Omega(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}}$  resp.  $S_{y=\beta}$  la symétrie d'axe  $\{y = \beta\}$  resp.  $S_{x=\alpha}$  la symétrie d'axe  $\{x = \alpha\}$

Traduisez cette interprétation pour le graphe d'une fonction réelle.

**Exercice:** Ci-dessous on a représenté  $\Gamma|_J$  où  $\Gamma$  est le support de  $(\mathbb{R}, t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)_{\mathcal{R}})$ . Tracer la courbe de Lissajous  $\Gamma$ .

**7.2.5 Branches Infinies**

Voir Fiche 05

**Proposition 7.2.6**  $\Delta$  d'équation  $ax + by + c = 0$  est une asymptote en  $\omega$  de  $(I, f)$  si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \omega} ax(t) + by(t) + c = 0$$

En particulier une asymptote est unique

Par ailleurs la position relative de son support relativement à  $\Delta$  est donnée par le signe de :  $ax(t) + by(t) + c$  pour  $t$  au voisinage de  $\omega$



**Preuve** La première partie de la proposition découle de

$$0 = \lim_{t \rightarrow \omega} d(M(t), \Delta) = \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On en déduit la position relative puisque,  $\Delta$  "coupe" le plan en deux demi-plans  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$

$$\Delta_+ : aX + bY + c \geq 0 \quad \text{et} \quad \Delta_- : aX + bY + c \leq 0$$

On voit donc que pour  $t$  au voisinage de  $\omega$

$$M(t) \in \Delta_+ \iff ax(t) + by(t) + c \geq 0$$

Montrons à présent l'unicité.

En Effet supposons par l'absurde que  $(I, f)$  admette deux asymptotes distinctes  $\Delta$  et  $\Delta'$  :

$$\Delta : aX + bY + c = 0 \quad \text{et} \quad \Delta' : a'X + b'Y + c' = 0$$

On a

$$\varepsilon(t) := ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'(t) := a'x(t) + b'y(t) + c' \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} 0$$

• Supposons  $\Delta \nparallel \Delta'$  alors

$$\Lambda := \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

On a donc le système de CRAMER

$$\begin{cases} ax(t) + by(t) & = & \varepsilon(t) - c \\ a'x(t) + b'y(t) & = & \varepsilon'(t) - c' \end{cases}$$

D'où

$$x(t) = \frac{1}{\Lambda} \begin{vmatrix} \varepsilon(t) - c & b \\ \varepsilon'(t) - c' & b' \end{vmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{\Lambda} \begin{vmatrix} a & \varepsilon(t) - c \\ a' & \varepsilon'(t) - c' \end{vmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \omega]{} \ell_2 \in \mathbb{R}$$

Or ceci est absurde car on a une branche infinie en  $\omega$

Donc on a montré par l'absurde que  $\Delta \parallel \Delta'$  (la direction asymptotique est unique). D'où :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*; \quad (a', b') = \lambda(a, b)$$

• Montrons  $\Delta = \Delta'$  D'après ce qui précède

$$\varepsilon'(t) = \lambda ax(t) + \lambda by(t) + c' = \lambda(\varepsilon(t) - c) + c'$$

D'où en faisant  $t \rightarrow \omega$

$$0 = -\lambda c + c'$$

On a donc montré que

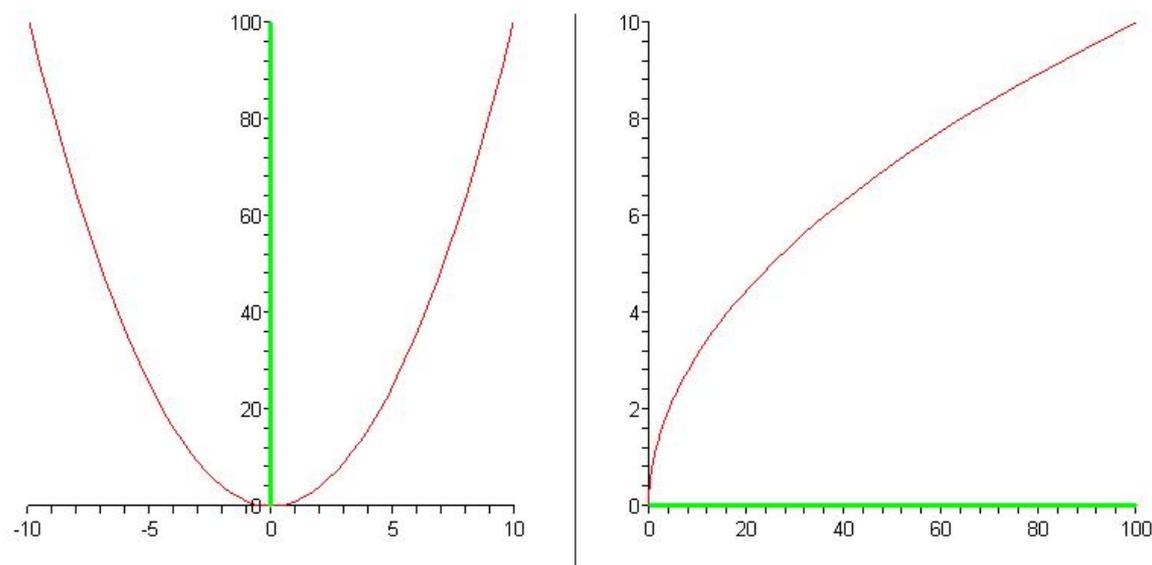
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*; \quad (a', b', c') = \lambda(a, b, c) \quad \text{i.e.} \quad \Delta = \Delta'$$

• Conclusion on a donc une contradiction, D'où l'unicité de l'asymptote.

**Exercice:** voir exercices 5 et 7

**Exemple:** Branches paraboliques et directions asymptotiques.

Les courbes paramétrées  $(\mathbb{R}, (t, t^2))$  et  $(\mathbb{R}_+, t^2, t)$  admettent en  $+\infty$  une branche parabolique (d'où le nom) de directions respectives l'axe  $Oy$  et l'axe  $Ox$ .



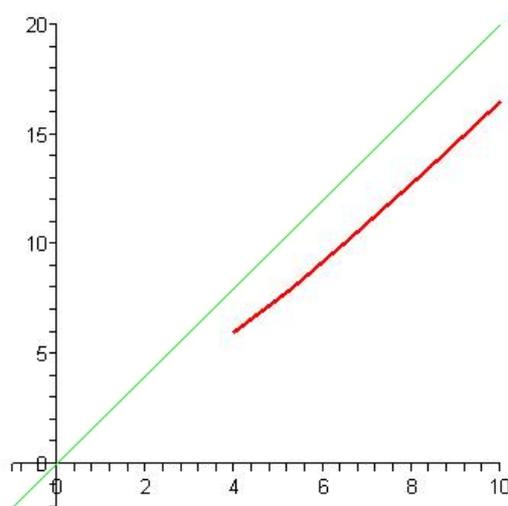
La courbe  $x(t) = 3t^2 + 1$  et  $y(t) = 6t^2 - t + 1/t^3$  admet en  $+\infty$  une branche infinie car

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

De direction asymptotique la droite d'équation  $Y = 2X$  car

$$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 2$$

Il s'agit en fait d'une branche parabolique suivant cette direction car :



### 7.2.6 Plan d'Etude d'une courbe paramétrée

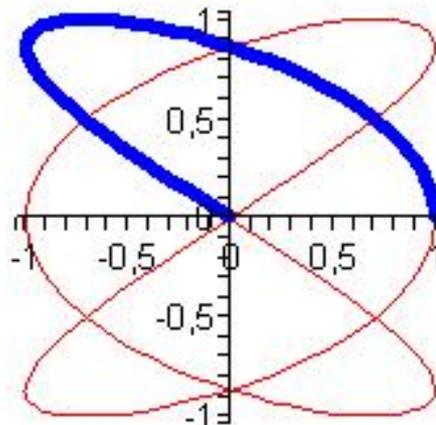
- Déterminer le domaine de définition de  $f$
- Restreindre le domaine d'étude à l'aide des symétries ou périodicités de l'expression. Et décrire les transformations associées
- *Eventuellement : recherche de points multiples*
- Etudier la dérivée  $f'$  : Etablir les tangentes sur des points réguliers caractéristiques et sur des points stationnaires.
- Tableau de variations de  $x$  et de  $y$
- *Eventuellement étudier la concavité et des éventuels points d'inflexion ou de rebroussement*
- Etude des branches infinies. Etablir les positions relatives du support relativement aux asymptotes
- Tracer le support de la courbe.

**Exemple:** Etudions la courbe de Lissajous  $f(t) = (\cos 3t, \sin 2t)$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Par  $2\pi$ -périodicité de  $f$ , on restreint l'étude à  $[-\pi, \pi]$ .  
Puisque  $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$ , la courbe est symétrique par rapport à  $Ox$ , on restreint encore le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ .  
Puisque  $(x(\pi - t), y(\pi - t)) = (-x(t), -y(t))$ , la courbe est symétrique par rapport à  $O$ , on restreint encore le domaine d'étude à  $[0, \pi/2]$ .
- $f'(t) = (-3 \sin 3t, 2 \cos 2t)$  : la courbe est régulière.  
Les tangentes sont verticales au points  $(1, 0)$  et  $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  de paramètres respectifs  $0$  et  $\pi/3$ .  
Au point  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$  de paramètre  $\pi/4$  la tangente est horizontale.
- On a le tableau de variation suivant :

$t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	-	-	-	0	+
$x$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
$y$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$y'(t)$	+	+	0	-	-

- D'où le support de la courbe.



## 7.3 Courbes en coordonnées Polaires

### 7.3.1 Définition

On considère le repère polaire associé à  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R}_\Theta = (0, \vec{u}(\Theta), \vec{v}(\Theta))$$

On notera  $(R, \Theta)$  les coordonnées génériques dans  $\mathcal{R}_\Theta$

**Définition 7.3.1** On appelle courbe paramétrée en coordonnées polaires de classe  $C^k$  la donnée de deux fonctions  $\rho : t \mapsto \rho(t)$  et  $\theta : t \mapsto \theta(t)$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 0$ ) et d'un ensemble  $I$  tels que : la courbe paramétrée  $(I, f)$  est définie par :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{Of(t)} = \rho(t) \vec{u}(\theta(t))$$



**Remarque:**  $(\rho(t), \theta(t))$  sont en fait les coordonnées polaires du point  $M(t)$  de paramètre  $t$

**Remarque:** puisque  $\rho$  et  $\theta$  sont de classe  $C^k$ , il en va de même pour la courbe paramétrée  $(I, f)$

**Remarque 7.3.1** Dans MAPLE si  $f$  et  $g$  sont des fonctions fléchées, les commandes

$$\text{plot}([r, \text{theta}, t1..t2], \text{coords} = \text{polar}) \quad \text{ou} \quad \text{plot}([\text{rho}(t), \text{theta}(t), t = t1..t2], \text{coords} = \text{polar})$$

permettent de tracer le support de la courbe paramétrée en coordonnées polaires  $([t1, t2], (\rho, \theta))$  \*

### 7.3.2 Vitesse et Accélération

Supposons donné une courbe polaire de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) :  $(I, t \mapsto (\rho(t), \theta(t)))$ .

**Proposition 7.3.1** En notant pour tout  $t \in I$ ,  $M(t) = f(t)$  le point de paramètre  $t$  de la courbe ci-dessus. On a les expressions suivantes de la vitesse et de l'accélération au point de paramètre  $t$  :

$$f' = \dot{\rho} \vec{u}(\theta) + \rho \dot{\theta} \vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad f'' = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}(\theta) + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{v}(\theta)$$



**Preuve** Il suffit de dériver deux fois l'expression

$$\overrightarrow{Of(t)} = \rho(t)(\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j})$$



## 7.4 Courbes polaires paramétrées par l'angle polaire

Dans le cas particulier où la fonction  $\theta : t \mapsto t$ . On dira que la courbe est paramétrée par l'angle polaire  $\theta$ .

Ainsi on écrira  $\mathcal{R}_\theta$  le repère polaire et  $(R, \theta)$  les coordonnées génériques. Et l'étude de la courbe polaire se réduit à l'étude sur  $I$  de l'application :

$$\rho : \theta \mapsto \rho(\theta)$$

On dira alors que  $(I, \rho)$  est la courbe polaire paramétrée par l'angle polaire.

**Exemple:**  $\rho(\theta) = 1$  cercle unité

$$\rho(\theta) = \frac{p}{\sin(\theta - \theta_0)} \text{ droite}$$

$$\rho(\theta) = \theta \text{ spirale}$$

### 7.4.1 Tangentes et Normales

L'expression de la vitesse calculées précédemment nous donne ici

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + \rho(\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$$

Et donc seul le point  $O$  peut être stationnaire. ainsi pour tous les autres points de paramètre  $\theta$  on a une tangente et un vecteur directeur de celle-ci.

**Proposition 7.4.1** *Pour tout point régulier  $M_0 = M(\theta_0)$ , la tangente  $\Gamma$  en ce point forme un écart angulaire  $V$  avec la droite  $(OM_0)$  défini par :*

$$V \equiv (\overrightarrow{u}(\theta_0), \widehat{\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}}(\theta_0)) \quad [\pi]$$

$V$  est caractérisé par :

$$\cotan V = \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)}$$

En particulier si  $\alpha$  désigne l'angle entre l'axe polaire et la tangente, on a :

$$\alpha \equiv \theta_0 + V \quad [\pi]$$



#### Preuve

• Soit  $V_0$  l'angle entre  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$  et  $\overrightarrow{u}(\theta_0)$ , (défini modulo  $2\pi$ ).

Et donc  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$  admet pour coordonnées polaires relatives au r.o.n.d.  $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$

$$\left( \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \right\|, V_0 \right) = \left( \sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}, V_0 \right)$$

D'où

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)} \left( \cos V_0 \overrightarrow{u}(\theta_0) + \sin V_0 \overrightarrow{v}(\theta_0) \right)$$

D'où

$$\cos V_0 = \frac{\rho'(\theta_0)}{\sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}} \quad \text{et} \quad \sin V_0 = \frac{\rho(\theta_0)}{\sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}}$$

Et donc  $\cotan V_0 = \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)}$ .

Il en va de même pour  $V = V_0 + k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$  quelconque), puisque  $\cotan$  est  $\pi$ -périodique

• Réciproquement si  $\cotan V = \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)}$ ,  $V$  est défini (modulo  $\pi$ ) et vérifie

$$\cos V = \lambda \rho'(\theta_0) \quad \text{et} \quad \sin V = \lambda \rho(\theta_0)$$

où l'on a posé

$$\lambda := \frac{\sin V}{\rho(\theta_0)}$$

On en déduit puisque  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  et que donc  $1 = \lambda^2(\rho^2 + \rho'^2)$

$$\cos V = \epsilon \frac{\rho'(\theta_0)}{\sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}} \quad \text{et} \quad \sin V = \epsilon \frac{\rho(\theta_0)}{\sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}}$$

avec  $\epsilon \in \{\pm 1\}$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta_0) = \rho'(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0) + \rho(\theta_0)\overrightarrow{v}(\theta_0) = \epsilon \sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)} \left( \cos V \overrightarrow{u}(\theta_0) + \sin V \overrightarrow{v}(\theta_0) \right)$$

Et donc les coordonnées polaires relatives au r.o.n.d.  $(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$  de  $\frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta_0)$  sont

$$\left( \epsilon \sqrt{\rho^2(\theta_0) + \rho'^2(\theta_0)}, V \right)$$

D'où

$$V \equiv \left( \vec{u}(\theta_0), \widehat{\frac{d\vec{OM}}{d\theta}}(\theta_0) \right) [\pi]$$

•

**Remarque:** Pour trouver la tangente au point  $M(\theta)$  qui est dans la direction  $\theta$  il suffit de "tourner" de  $V$ .

**Remarque:** Au pôle  $O$ , si la courbe y passe en un point de paramètre  $\theta_0$ , la tangente est la droite  $\theta = \theta_0$ .

(En effet la corde  $(OM(\theta))$  est dirigée par  $\vec{u}(\theta)$  qui tend vers  $\vec{u}(\theta_0)$  lorsque  $\theta \rightarrow \theta_0$ )

**Remarque:** La normale à la courbe en un point étant orthogonale à la tangente en ce point la caractérisation s'en déduit très simplement par simple addition d'un angle  $\frac{\pi}{2}$  aux caractérisations de la tangente à l'aide  $V$  ou  $\alpha$ .

## 7.4.2 Symétries

Comme dans le cas des courbes paramétrées cartésiennes, les symétries se traduisent à l'aide de transformation géométrique du support  $\Gamma$  ce qui nous permet de restreindre le domaine d'étude. Pour faciliter les écritures on supposera  $\rho$  défini sur  $I = \mathbb{R}$

**Exemple:**

**Si**  $\rho$  est  $2k\pi$ -périodique. **Alors**  $\Gamma = \Gamma_{[a, a+2k\pi]}$  (ici  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in I$ )

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{[a, a+\pi]} \cup S_O \left( \Gamma|_{[a, a+\pi]} \right)$

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{[a, a+\pi]}$

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(-\theta) = -\rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{I \cap \mathbb{R}_+} \cup S_{ord} \left( \Gamma|_{I \cap \mathbb{R}_+} \right)$

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(-\theta) = \rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{I \cap \mathbb{R}_+} \cup S_{absc} \left( \Gamma|_{I \cap \mathbb{R}_+} \right)$

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(2\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{I \cap [\theta_0, +\infty[} \cup S_{\theta_0} \left( \Gamma|_{I \cap [\theta_0, +\infty[} \right)$

**Si**  $\forall \theta \in I, \rho(2\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$  **Alors**  $\Gamma = \Gamma|_{I \cap [\theta_0, +\infty[} \cup S_{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \left( \Gamma|_{I \cap [\theta_0, +\infty[} \right)$

Avec  $S_\alpha$  la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire  $\alpha$

**Preuve** Notons  $(I, f)$  la courbe paramétrée associée et de façon générique  $f : \theta \mapsto M(\theta)$

• Dans le cas où  $\rho$  est  $2k\pi$ -périodique. Puisque

$$\forall \theta \in I, \overrightarrow{OM}(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta + 2k\pi) \vec{u}(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta) \vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta)$$

et donc  $f$  est  $2k\pi$ -périodique

• Dans le cas où  $\forall \theta \in I, \rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ .

$$\forall \theta \in I, \overrightarrow{OM}(\theta + \pi) = \rho(\theta + \pi) \vec{u}(\theta + \pi) = \rho(\theta + \pi) S_O \left( \vec{u}(\theta) \right) = S_O \left( \rho(\theta) \vec{u}(\theta) \right) = S_O \left( \overrightarrow{OM}(\theta) \right)$$

et donc  $f \circ \psi = S_O \circ f$  avec  $\psi : \theta \mapsto \theta + \pi$

- Dans le cas où  $\forall \theta \in I$ ,  $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ .

$$\forall \theta \in I, \quad \overrightarrow{OM}(\theta + \pi) = \rho(\theta + \pi) \overrightarrow{u}(\theta + \pi) = \rho(\theta) \left( -\overrightarrow{u}(\theta + \pi) \right) = \rho(\theta) \overrightarrow{u}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta)$$

et donc  $f$  est  $\pi$ -périodique

- Dans le cas où  $\forall \theta \in I$ ,  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ .

$$\forall \theta \in I, \quad \overrightarrow{OM}(-\theta) = \rho(-\theta) \overrightarrow{u}(-\theta) = -\rho(\theta) S_{ord} \left( -\overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{ord} \left( \rho(\theta) \overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{ord} \left( \overrightarrow{OM}(\theta) \right)$$

et donc  $f \circ \psi = S_{ord} \circ f$  avec  $\psi : \theta \mapsto -\theta$

- Dans le cas où  $\forall \theta \in I$ ,  $\rho(2\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$ .

$$\forall \theta \in I, \quad \overrightarrow{OM}(2\theta_0 - \theta) = \rho(2\theta_0 - \theta) \overrightarrow{u}(2\theta_0 - \theta) = \rho(\theta) S_{\theta_0} \left( \overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{\theta_0} \left( \rho(\theta) \overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{\theta_0} \left( \overrightarrow{OM}(\theta) \right)$$

et donc  $f \circ \psi = S_{\theta_0} \circ f$  avec  $\psi : \theta \mapsto 2\theta_0 - \theta$

- Dans le cas où  $\forall \theta \in I$ ,  $\rho(2\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$ .

$$\forall \theta \in I, \quad \overrightarrow{OM}(2\theta_0 - \theta) = \rho(2\theta_0 - \theta) \overrightarrow{u}(2\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta) S_{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \left( -\overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \left( \rho(\theta) \overrightarrow{u}(\theta) \right) = S_{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \left( \overrightarrow{OM}(\theta) \right)$$

et donc  $f \circ \psi = S_{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \circ f$  avec  $\psi : \theta \mapsto 2\theta_0 - \theta$

•

**Remarque:** Un moyen mnémotechnique est le suivant :

Si le module  $r$  devient  $r'$  lorsqu'on passe de  $\theta$  à  $\theta'$ , il suffit de trouver la transformation faisant passer d'un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  à  $(r', \theta')$ .

Par exemple pour  $\theta' = -\theta$  et  $r' = -r$

$$(r, \theta) \xrightarrow{S_{ord}} (-r, -\theta)$$

**Exemple:**  $\rho = \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}$  est défini sur  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]0, 2k\pi[$ .

$\rho$  est  $2\pi$  périodique et paire.

On ramène l'étude à  $]0, \pi]$  et on complète par une symétrie /  $Ox$

**Exercice:** On pose  $T = \frac{a\pi}{b}$  avec et  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $J$  un intervalle de longueur  $T$  (semi-fermé ou fermé) avec  $J \subset I$

On note pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Rot_k$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $kT$  et  $\Gamma_k := Rot_k \left( \Gamma \Big|_J \right)$  Montrer que :

**Si**  $\rho$  est  $T$ -périodique **Alors**  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{2b-1} \Gamma_k = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_{2b-1}$

**Si**  $\rho$  est  $T$ -antipériodique ( $\rho(\theta + T) = -\rho(\theta)$ ) **Alors**  $\Gamma = \Gamma_0 \cup S_0(\Gamma_1) \cup \dots \cup S_0(\Gamma_{b-1})$   
(on retrouve le cas où  $\rho$  est  $2T$ -périodique)

**indication :** Puisque  $\rho(\theta + a\pi) = (-1)^a \rho(\theta)$ , on a  $M(\theta + a\pi) = M(\theta)$  et donc  $\Gamma = \Gamma_K$  où  $K$  est de longueur  $a\pi$  :

$$K := J \cup (J + T) \cup \dots \cup (J + (b-1)T)$$

Or puisque  $M(\theta + T) = Rotation_{T+\pi}(M(\theta)) = S_0 \circ Rot_1(M(\theta))$

$$\forall \theta \in J, \quad \underbrace{M(\theta + kT)}_{\in J+kT} = S_0 \circ Rot_k M(\theta)$$

Ainsi dans un cas comme dans l'autre  $\Gamma$  se construit par des rotations successives de  $\Gamma_0$

**Exemple:**

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Domaine de définition  $D = \{\theta, \sin \frac{\theta}{2} \neq 0\}$  Par parité et  $2\pi$  anti-périodicité on se ramène à  $]0, \pi]$  on complète par symétries par rapport à  $O$  et  $Oy$ .

### 7.4.3 Branches infinies

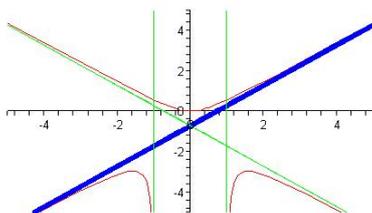
Voir fiche

**Exemple:** Branche infinie en  $\pi/4^+$  de  $\rho = \frac{\tan \theta}{\cos 2\theta}$

On pose  $u = \theta - \frac{\pi}{4}$  D'où dans le repère cartésien  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$  la courbe paramétrée est  $(\tilde{x}(\theta), \tilde{y}(\theta))$

$$\tilde{y}(\theta) = \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1 + \tan u}{2(1 - \tan u) \cos u} \xrightarrow{u \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2}$$

Cette courbe admet donc une asymptote d'équation  $\tilde{Y} = -1/2$  dans  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$ . Or  $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$  est le repère obtenu par rotation d'angle  $\pi/4$  de  $\mathcal{R}$ ,



### 7.4.4 Plan d'Etude d'une Courbe Polaire

- Déterminer le domaine de définition de  $\rho$
- Restreindre le domaine d'étude à l'aide des symétries ou périodicités de l'expression. Et décrire les transformations associées
- *Eventuellement : recherche de points multiples*
- Etudier le signe  $\rho$  et éventuellement ses variations
- Etablir les tangentes sur des points caractéristiques à l'aide de l'angle  $V$
- Réunir les valeurs caractéristiques de  $\rho$  et  $V$  dans un tableau
- *Eventuellement étudier la concavité et des éventuels points d'inflexion ou de rebroussement*
- Etude des branches infinies. Etablir les positions relatives du support relativement aux asymptotes
- Tracer le support de la courbe.

**Exemple:** Etudions la cardioïde  $\rho(\theta) = 1 + \cos \theta$

- $\mathcal{D}_\rho = \mathbb{R}$
- Par  $2\pi$ -périodicité de  $\rho$ , on restreint l'étude à  $[-\pi, \pi]$ .  
Puisque  $\rho$  est paire, la courbe est symétrique par rapport à  $Ox$ ,  
on restreint encore le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ .
- $\rho$  est décroissante sur  $[0, \pi]$  et pour tout point de paramètre  $\theta \in [0, \pi[$ , on a

$$\cotan V = -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = -\tan \frac{\theta}{2}$$

la tangente en  $O$  de paramètre  $\pi$  est horizontale.

- On a le tableau de variation suivant :

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\rho$	2	1	0
$V$	$\pi/2$	$-\pi/4$	$\parallel$

- D'où le support de la courbe.

