

Table des matières

10 Suites de Nombre réels	3
10.1 Généralités sur les suites	3
10.1.1 Suites - Suites extraites	3
10.1.2 Suites Monotones - Suites bornées	3
10.2 Limite d'une suite : Convergence	4
10.2.1 La Notion de Voisinage	4
10.2.2 Suites Convergentes	5
10.2.3 Théorèmes de Comparaison	7
10.2.4 Opérations algébriques sur les limites	8
10.3 Théorèmes d'existence de limites	9
10.3.1 Suites Extraites et Convergence en Moyenne de Cesaro	9
10.3.2 Théorèmes des Gendarmes	11
10.3.3 Suites Monotones	12
10.3.4 Segments Emboîtés et suites adjacentes	13
10.4 Relations de Comparaison	15
10.4.1 Définitions	15
10.4.2 Propriétés	17
10.4.3 Caractérisation et Suites référence	20
10.5 Brève extension aux suites complexes	22

Chapitre 10

Suites de Nombre réels

10.1 Généralités sur les suites

10.1.1 Suites - Suites extraites

Définition 10.1.1 On appelle suite de nombre réels la donnée d'une famille $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels u_n indexée par des entiers $n \in \mathbb{N}$. Cette notion est équivalente à la donnée d'une application :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$



De toute suite, on peut extraire des éléments, quand ces éléments sont rangés par indices croissants (en nombre infini), on parle alors de suite extraite

Définition 10.1.2 (Suite extraite)

Soit u une suite de réels, on dit que v est une suite extraite (ou sous-suite) de u , lorsque

$$v = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On note parfois $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ pour désigner v , où $n_k = \phi(k)$



Exemple: les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+7})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\sigma(n)$ désigne le n -ième nombre premier, sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Remarque 10.1.1 On sera amené à considérer des suites définies uniquement à partir d'un certain rang (apcr) $n_0 \in \mathbb{N}$. Ainsi on désignera par $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite extraite $u_{+n_0} = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\phi(n) = n + n_0$. De même toute propriété sera dite apcr pour la suite u , si elle est vraie pour une certaine sous-suite u_{+n_0} .

$$''u \text{ vérifie } \mathcal{P} \text{ apcr}'' \quad \text{signifie} \quad ''\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \text{ vérifie } \mathcal{P}''$$

*

Remarque: Si u vérifie $\mathcal{P}$ apcr et u vérifie $\mathcal{Q}$ apcr Alors u vérifie $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ apcr

10.1.2 Suites Monotones - Suites bornées

L'une des premières informations que l'on peut tirer d'une suite, est son comportement vis à vis de la relation d'ordre. Ainsi on a :

Définition 10.1.3 (Suites monotones) Soit u une suite réelle. On dit que u est croissante, lorsque les valeurs prises par u_n sont rangées dans l'ordre croissant des valeurs de n , c.a.d :

$$\begin{aligned}
u \text{ est croissante} &\iff (\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n) \\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1})
\end{aligned}$$

lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement croissante.

En revanche, lorsque les valeurs de u sont rangées dans l'ordre décroissant des valeurs de n , on dira que u est décroissante :

$$\begin{aligned}
u \text{ est décroissante} &\iff (\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n) \\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1})
\end{aligned}$$

lorsque les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement décroissante.

Enfin toute suite u étant soit croissante soit décroissante, sera dite monotone ou strictement monotone dans le cas des inégalités strictes. ♠

Remarque 10.1.2 Ce n'est pas parce que $u_n/u_{n+1} \leq 1$, que l'on peut affirmer que u est croissante, encore faut-il vérifier (au préalable) que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. *

Définition 10.1.4 Soit u une suite réelle et $U := \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble image de u . On dira que u est majoré (resp. minoré, resp borné) lorsque U est majoré (resp. minoré, resp borné). ♠

Exercice: Montrez que

$$\begin{aligned}
u \text{ minoré} &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad m \leq u_n \\
u \text{ majoré} &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n \leq M \\
u \text{ borné} &\iff \exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad |u_n| \leq A
\end{aligned}$$

Remarque 10.1.3 u est majoré (resp. minoré, resp borné) si et seulement si u est majoré (resp. minoré, resp borné) a.p.c.r.

En effet les n_0 premiers termes d'une suite quelconque, forme un ensemble fini, donc borné. *

Question: A-t-on cette équivalence pour la monotonie ?

10.2 Limite d'une suite : Convergence

10.2.1 La Notion de Voisinage

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, tout intervalle V ouvert et centré en x_0 contient x_0 et les réels proches de ℓ , on dira que V est un voisinage de ℓ et on note $\mathcal{BV}(\ell)$ l'ensemble de ces intervalles :

$$V \in \mathcal{BV}(\ell) \iff \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Exemple: $]0, 2[\in \mathcal{BV}(1)$ $]\pi - 100, \pi + 100[\in \mathcal{BV}(\pi)$ et $]0.99, 1.01[\in \mathcal{BV}(1)$

Remarque: Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés

Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ **Alors** $x \in V \iff |x - \ell| < \varepsilon$

Remarque: toute réunion finie ou intersection finie d'intervalles de $\mathcal{BV}(\ell)$ est encore un voisinage de ℓ

On sera amené à définir d'autres familles de voisinage :

Définition 10.2.1 (familles de voisinages) Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on définit la famille de voisinages époutés, à gauche et à droite de ℓ par

$$\begin{aligned}
V \in \dot{\mathcal{BV}}(\ell) &\iff \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\setminus \{\ell\} \\
V \in \mathcal{BV}_g(\ell) &\iff \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell - \varepsilon, \ell, [\\
V \in \mathcal{BV}_d(\ell) &\iff \exists \varepsilon > 0; \quad V =]\ell, \ell + \varepsilon[
\end{aligned}$$

♠

Remarque: Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés

Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\setminus \{\ell\}$ **Alors** $x \in V \iff 0 < |x - \ell| < \varepsilon$

Si $V =]\ell - \varepsilon, \ell[$ **Alors** $x \in V \iff 0 < \ell - x < \varepsilon$

Si $V =]\ell, \ell + \varepsilon[$ **Alors** $x \in V \iff 0 < x - \ell < \varepsilon$

A présent regardons cette notion de petitesse sur un exemple.
On a alors

Or

Lemme 10.2.1 Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a \text{ est aussi proche de } 0 \text{ que l'on veut} &\iff \text{Quel que soit le voisinage } V \text{ de } 0, a \in V \\ &\iff \left(\forall V \in \mathcal{V}(0), a \in V \right) \\ &\iff \left(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon \right) \\ &\iff a = 0 \end{aligned}$$

♣

Preuve D'après la proposition précédente il suffit de montrer que :

$$\left(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon \right) \iff a = 0$$

L'implication réciproque étant évidente, montrons l'implication directe.
On a par hypothèse

$$\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$$

Si par l'absurde $a \neq 0$, on aurait d'après ce qui précède en prenant $\epsilon = \frac{|a|}{2}$

$$|a| < \frac{|a|}{2}$$

Ce qui est absurde... CQFD

•

Remarque 10.2.1 Le Lemme ci-dessus nous montre que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(0)} V = \{0\}$$

*

Ainsi toute suite u vérifiant

$$\text{Quel que soit le voisinage } V \text{ de } 0, u \in V$$

n'est autre que la suite nulle. En revanche si u est aussi proche de 0 aprcr, la suite peut sans être nulle se "comporter à l'infini" comme la suite nulle

Il va s'agir par la suite d'étudier la propriété :

$$\mathcal{P}(V) = "u \in V \text{ aprcr}"$$

Où V est un certain voisinage, et u est une suite réelle.

10.2.2 Suites Convergentes

Définition 10.2.2 On dira qu'une suite u converge vers un réel l , lorsque :

Quel que soit le voisinage V de l la suite u est en dehors de V pour un nombre fini d'indices¹.

C'est encore équivalent à dire que

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), u \in V \text{ aprcr}$$

On notera

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Lorsqu'une suite u admet une limite l , on dira qu'elle est convergente.

♠

¹Ceci n'est pas équivalent au fait que $u_n \in V$ pour une infinité d'indices

On peut reformuler cette assertion par

Proposition 10.2.2 Soit u une suite et l un réel, on a :

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l &\iff \left(\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V \right) \\ &\iff \left(\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon \right) \end{aligned}$$

♣

Lemme 10.2.3 Toute suite convergente admet une unique limite.

♣

Preuve Supposons que la suite convergente u admette deux limites distinctes l et l' , on a alors grâce à la quantification des deux convergences, pour un $\epsilon > 0$ donné :

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l| < \epsilon/2) \quad \text{et} \quad (\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l'| < \epsilon/2)$$

En particulier pour $n = N_1 + N_2$, on a :

$$|u_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{et} \quad |u_n - l'| < \epsilon/2$$

D'où grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \epsilon$$

Et ceci quel que soit $\epsilon > 0$. D'où $l = l'$.

•

Notation : grâce à ce dernier lemme, on peut introduire la notation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou encore $\lim u = l$.

Remarque 10.2.2 Lorsque seule u est donnée par le contexte, l'expression $\lim u = l$ signifie deux choses, la première est que u est convergente, et la deuxième est que cette limite vaut l .

Ainsi $\text{non}(\lim u = l)$ n'est pas équivalent à $\lim u \neq l$. L'équivalence n'a lieu que lorsque u est convergente et l est donnée par le contexte.

*

Exercice: Montrer l'équivalence

$$\lim u = l \iff \lim |u - l| = 0$$

Exercice: Montrer que $\lim u = l \implies \lim |u| = |l|$, Qu'en est-il de la réciproque ?

On dira qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente. Un cas particulier de suites divergentes sont les suites qui tendent vers l'infini :

Définition 10.2.3 (Limites infinies) Soit u une suite réelle, on dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$) lorsque :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N; u_n > A$$

respectivement :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N; u_n < -A$$

En particulier $\lim u = -\infty \iff \lim -u = +\infty$

♠

Remarque 10.2.3 On voit immédiatement que toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. minorée). En revanche la réciproque est fausse, puisque la suite $u_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée et pourtant elle ne tend pas vers $+\infty$.

*

Remarque 10.2.4 Qu'il s'agisse de la convergence ou des limites infinies, ce sont des propriétés qui ne dépendent que du comportement après des suites. Ainsi quelle que soit la suite extraite $v = u_{\cdot + n_0}$, on a

$$\lim u = L \iff \lim v = L$$

Où $L \in \overline{\mathbb{R}}$

*

10.2.3 Théorèmes de Comparaison

Il s'agit d'étudier le rapport qui existe entre limites et encadrements :

Proposition 10.2.4 *Toute suite convergente est bornée* ♣

Preuve Soit l la limite d'une suite convergente u . Comme $]l - 1, l + 1[\in \mathcal{V}(l)$, on sait que :

$$u_n \in]l - 1, l + 1[\quad \text{apcr}$$

Par ailleurs si on note N ce rang à partir duquel l'assertion ci dessus est vraie, on a, en toute généralité,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$$

avec $I :=]l - 1, l + 1[\cup \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ qui est bien évidemment borné. •

Remarque 10.2.5 *La réciproque est fausse, puisque $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente* *

Théorème 10.2.5 (de Comparaison) *Soient u et v deux suites convergentes et qui vérifient*

$$u_n \leq v_n \quad \text{apcr}$$

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

♣

Preuve Soit N_0 le rang à partir duquel, l'encadrement ci-dessus est vrai.

Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. v vers L), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad l - \epsilon < u_n \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad v_n < L + \epsilon$$

Et donc, pour $n = N_0 + N_1 + N_2$, on a

$$l - \epsilon < u_n \leq v_n < L + \epsilon$$

Donc on a montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad l - L < 2\epsilon$$

On conclut alors $l - L \leq 0$ (exercice) •

Remarque 10.2.6 *Il ne faut pas croire que parce que $u_n < v_n$ apcr, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. En effet $1/n > 0$ et pourtant le passage à la limite donne une égalité.* *

Corollaire 10.2.6 *Soit u une suite convergente vérifiant $u_n \leq a$ apcr pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq a$$

On a le résultat analogue pour les inégalités inverses.

En particulier, si la suite u est positive (apcr), sa limite le sera aussi. ♣

Ce corollaire admet une réciproque partielle

Lemme 10.2.7 *Si une suite u admet une limite $l > 0$, alors cette suite est strictement positive apcr. Plus précisément :*

$$u_n \geq \frac{l}{2} \quad \text{apcr}$$

Le résultat analogue est vrai pour $l < 0$. ♣

Preuve Posons $V :=]l/2, 3l/2[\in \mathcal{V}(l)$, on a donc par la convergence de u

$$u_n \in V \quad \text{apcr}$$

•

10.2.4 Opérations algébriques sur les limites

Théorème 10.2.8 (Linéarité de la limite) Soient u et v deux suites réelles, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on note $w := \lambda u + \mu v$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n := \lambda u_n + \mu v_n$$

Si u et v convergent, alors w converge et on a l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

♣

Preuve Par hypothèse on a

$$\forall \delta_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| < \delta_1$$

$$\forall \delta_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |v_n - L| < \delta_2$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. v vers L), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad |\lambda||u_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad |\mu||v_n - L| < \epsilon/2$$

En effet dans le cas λ nul le résultat est évident, dans le cas contraire il suffit de prendre le N_1 associé à la valeur $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2|\lambda|}$ dans la quantification ci-dessus (le raisonnement est le même pour v)

Et donc en posant $N = N_1 + N_2$, on a grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq N, \quad |(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda l + \mu L)| \leq |\lambda||u_n - l| + |\mu||v_n - L| < \epsilon$$

CQFD

•

Théorème 10.2.9 (Produit) Soient u et v deux suites réelles, on note $w := uv$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n := u_n v_n$$

Si u et v convergent, alors w converge et on a l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

♣

Preuve On remarque que u et v étant convergentes, elles sont bornées, soit alors M un majorant de $|u|$ et $|v|$. on trouve alors grâce à l'inégalité triangulaire

$$|u_n v_n - lL| = \frac{1}{2} |(u_n - l)(v_n + L) + (u_n + l)(v_n - L)| \leq \frac{1}{2} [|u_n - l|(M + |L|) + (M + |l|)|v_n - L|]$$

Grâce à la linéarité de la limite, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [|u_n - l|(M + |L|) + (M + |l|)|v_n - L|] = 0$$

On conclut alors, en appliquant le théorème des gendarmes.

•

Théorème 10.2.10 (Passage à l'inverse) Soit u une suite ne s'annulant pas, on définit la suite $v := 1/u$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 1/u_n$$

Si de plus u converge vers une limite $l \neq 0$, alors, la suite v converge également, et l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{l}$$

♣

Preuve Puisque u converge vers une limite $l \neq 0$, supposons par exemple $l > 0$. on a alors

$$u_n > \frac{l}{2} \quad \text{apcr}$$

Et donc

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{u_n - l}{u_n \cdot l} \right| \leq \frac{2}{l^2} |u_n - l| \quad \text{apcr}$$

On conclut alors grâce au théorème des gendarmes. •

Proposition 10.2.11 Soient u et v deux suites convergeant respectivement ℓ, ℓ' dans $\bar{\mathbb{R}}$. Dès que ces expressions ont un sens on a :

$$\lim u + v = \lim u + \lim v \quad \text{et} \quad \lim u \cdot v = \lim u \cdot \lim v$$

Dans le cas contraire on parle de forme indéterminée. ♣

Exercice: le prouver

Démonstration Montrons par exemple le cas $\ell \times (+\infty) = +\infty$ avec $\ell > 0$.

Soient $\lim u = \ell > 0$ et $\lim v = +\infty$.

On a en particulier $u \geq \frac{\ell}{2}$ apcr (N_0).

Soit $A > 0$ quelconque, on a puisque $\lim v = +\infty$, pour un certain $N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_1, \quad n \geq N_1 \implies v_n > \frac{2A}{\ell}$

Et donc en posant $N = N_0 + N_1 \quad \forall n \geq N, \quad u_n \cdot v_n > \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2A}{\ell} = A \dots \text{CQFD}$ •

Notation : La notation $\lim u = a^+$ signifie que $\lim u = a$ et que de plus $u > a$ apcr (convention analogue pour $\lim u = a^-$)

Exercice: Montrer que :

$$\lim u = a^+ \iff \forall V \in \mathcal{V}_d(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \in V$$

Proposition 10.2.12

$$\lim 1/u$$

$\lim u$	$\lim 1/u$
0	FI
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$l \neq 0$	$1/l$
$+\infty$	0^+
$-\infty$	0^-

♣

10.3 Théorèmes d'existence de limites

10.3.1 Suites Extraites et Convergence en Moyenne de Cesaro

Proposition 10.3.1 Toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite ♣

Preuve La preuve repose sur un résultat préliminaire très facilement démontrable par récurrence :

Toute fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geq n$

Soit alors $\epsilon > 0$, d'après la convergence de u (on notera l sa limite), on sait qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \epsilon$$

D'où, puisque dès que $k \geq N$, on a par croissance de ϕ , $\phi(k) \geq \phi(N) \geq N$, on en déduit :

$$\forall k \geq N, \quad |u_{\phi(k)} - l| < \epsilon$$

... CQFD •

Corollaire 10.3.2 Toute suite extraite d'une suite convergente vers $+\infty$ (resp $-\infty$), converge vers la même limite infinie. ♣

Remarque 10.3.1 En revanche ce n'est pas parce que une suite extraite converge que la suite de départ converge : voir $u_n = (-1)^n$.

*

Cependant il existe une réciproque partielle (c'est un exercice facile)

Proposition 10.3.3 Soit u une suite tel que les suites extraites : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite $l \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

♣

Démonstration Montrons par exemple le cas $l \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. D'après la quantification des limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , on peut trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ respectivement tels que

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$$

D'où en posant $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a :

Soit $n \geq N$ quelconque :

- 1er cas n est pair, et donc $n = 2p$ avec $p \geq N_1$ $|u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon$
- 2eme cas n est impair, et donc $n = 2p + 1$ avec $p \geq N_2$ $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$
- Conclusion : Dans tous les cas : $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon \dots$ CQFD •

Corollaire 10.3.4

Si une suite u admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes alors u diverge.

Si u admet une suite extraite divergente alors u diverge.

Si u admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes (finies ou infinies) alors u diverge et n'admet pas de limite infinie. ♣

Définition 10.3.1 Soit u une suite réelle et C sa moyenne de Cesaro, il s'agit de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

Soit $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$. Si $\lim C = \bar{\ell}$, on dit alors que u converge vers $\bar{\ell}$ en moyenne de Cesaro ♠

Exemple: la suite définie par $u_n = (-1)^n$ converge vers 0 en moyenne de Cesaro.

Proposition 10.3.5 Soient $\ell \in \mathbb{R}$, u une suite réelle et C sa moyenne de Cesaro.

Si $\lim u = \ell$ **Alors** $\lim C = \ell$.

i.e. **Si** u converge vers ℓ , **Alors** u converge vers ℓ en moyenne de Cesaro ♣

Preuve Notons C_n la suite ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, d'après la convergence, on a pour un certain $N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où puisque par l'inégalité triangulaire

$$|C_n - l| = \left| \frac{(u_0 - l) + \dots + (u_n - l)}{n+1} \right| \leq \left| \frac{(u_0 - l) + \dots + (u_N - l)}{n+1} \right| + \left| \frac{(u_N - l) + \dots + (u_n - l)}{n+1} \right|$$

On a

$$\forall n \geq N + N_0, \quad |C_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N + 2}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

avec N_0 tel que pour $n \geq N_0$

$$\left| \frac{(u_0 - l) + \dots + (u_N - l)}{n + 1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

•

Exercice: Qu'en est-il dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$

Remarque: Attention la réciproque est fautive. Comme nous le montre la suite $u_n = (-1)^n$

10.3.2 Théorèmes des Gendarmes

Le théorème de comparaison est un simple passage à la limite dans les inégalités, ce qui suppose que ces limites existent, le théorème suivant va nous donner un résultat d'existence de la limite :

Théorème 10.3.6 (des Gendarmes) Soient u, v et w trois suites réelles vérifiant :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ apcr
- u et w convergent vers la même limite l

On a alors

$$v \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$$

♣

Preuve Soit N_0 le rang à partir duquel, l'encadrement ci-dessus est vrai.

Soit $\epsilon > 0$ fixé, grâce à la convergence de u vers l (resp. w vers l), on peut trouver un entier N_1 (resp. N_2) tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad l - \epsilon < u_n \quad \text{respectivement} \quad \forall n \geq N_2, \quad w_n < l + \epsilon$$

Et donc en posant $N = N_0 + N_1 + N_2$, on a : $\forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon$

On a donc prouvé que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$$

•

Dans la pratique on utilisera

Corollaire 10.3.7 Soient u, v deux suites réelles vérifiant :

- $|u_n| \leq v_n$ apcr
- $\lim v = 0$

On a alors

$$u \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

♣

On a l'équivalent pour le cas des suites convergent vers $+\infty$

Théorème 10.3.8 (des Gendarmes cas infini) Soient u et v deux suites réelles vérifiant :

$$u_n \leq v_n \text{ apcr} \quad \text{et} \quad \lim u = +\infty$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

♣

Et bien sûr le résultat analogue pour la limite $-\infty$ est vrai.

Exercice: prouver ces deux théorèmes.

10.3.3 Suites Monotones

Théorème 10.3.9 (Suites monotones)

Toute suite u croissante majorée est convergente, sa limite vaut :

$$\lim u = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

♣

Preuve Quitte à considérer $u_{\cdot+n_0}$, on peut supposer u croissante majorée. Donc l'ensemble

$$\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est un sous-ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$, soit l sa borne supérieure.

On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \leq l \\ \forall \epsilon > 0 & \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad l - \epsilon < u_{n_0} \end{cases}$$

Comme u est croissante :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n_0} \leq u_n$$

On a donc

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \quad l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$$

•

Corollaire 10.3.10 Toute suite v décroissante minorée est convergente, sa limite vaut :

$$\lim v = \inf_{n \in \mathbb{N}} v_n$$

♣

Question: Que peut-on dire pour une suite majorée croissante apcr ou minorée décroissante apcr ?

Remarque 10.3.2 On peut montrer que toute suite croissante, non majorée tend vers l'infini. On a donc en toute généralité :

$$u \text{ croissante} \implies \lim u = \sup u$$

De même :

$$v \text{ décroissante} \implies \lim v = \inf v$$

*

Remarque 10.3.3 En revanche ce n'est pas parce que une suite est majorée, qu'elle est convergente (cf $u_n = (-1)^n$). De même qu'il est faux de penser qu'une suite non majorée tend vers l'infini (cf $u_n = (-1)^n n$). *

Proposition 10.3.11 Soient m et M pris dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$\sup A = M \implies \exists u \text{ suite croissante dans } A, \quad \lim u = M$$

De même :

$$\inf A = m \implies \exists v \text{ suite décroissante dans } A, \quad \lim v = m$$

On dit alors que u (resp. v) est une suite maximisante (resp. minimisante).

♣

10.3.4 Segments Emboîtés et suites adjacentes

Définition 10.3.2 (Suites adjacentes) Deux suites u et v sont adjacentes lorsque :

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ \lim(u - v) = 0 \end{cases}$$



Théorème 10.3.12 (Suites adjacentes) Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite



Démonstration Supposons par l'absurde que :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad v_p < u_p$$

Comme u est croissante et v décroissante :

$$\forall n \geq p, \quad v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$$

On en déduit

$$u_n - v_n \geq u_p - v_p > 0$$

D'où par passage à la limite :

$$0 \geq u_p - v_p > 0$$

ce qui est absurde. Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$$

Et donc par une récurrence immédiate, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_0 \quad \text{et} \quad u_0 \leq v_n$$

Donc d'après le théorème des suites Monotones, on en déduit que u et v convergent, leurs limites étant alors identiques puisque :

$$\lim(u - v) = 0$$



Remarque 10.3.4 Notons au passage, que l'on a démontré que deux suites adjacentes u et v , vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_n$$

Où l est la limite commune



On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle fermé borné $I := [a, b]$ (avec $a \leq b$), on pose alors $|I| = b - a$.

Théorème 10.3.13 (Segments emboîtés) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} \subset I_n \\ |I_n| \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty$$

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est non vide et réduit à un point.



Démonstration Posons $I_n = [a_n, b_n]$. Comme $I_{n+1} \subset I_n$, on a :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

C'est à dire (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

De plus

$$\lim(b_n - a_n) = \lim |I_n| = 0$$

Donc il s'agit de suites adjacentes, on note l leur limite commune :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq l \leq b_n$$

on a donc $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Par ailleurs si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x \leq b_n$$

D'où par passage à la limite : $l \leq x \leq l$ i.e $x = l$. D'où l'unicité. •

Exemple: Soit $I_0 = [a_0, b_0]$ un segment de longueur ℓ et x un élément de I_0 . En scindant en deux cet intervalle on obtient un intervalle I_1 de longueur $\ell/2$ qui contient x .

$$I_1 = [a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$$

En répétant ce procédé on construit une suite dichotomique d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenant tous x

$$I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$$

Il s'agit là d'une suite de segments emboîtés puisque $|I_n| = \frac{\ell}{2^n}$ et donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

Exercice: Partant de $I_0 = [1, 2]$ construire les intervalles I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 de la suite dichotomique d'intervalles associée à $\sqrt{2}$

solution

$$I_1 = [1, \frac{3}{2}] \quad I_2 = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \quad I_3 = [\frac{11}{8}, \frac{3}{2}] \quad I_4 = [\frac{11}{8}, \frac{23}{16}] \quad \text{et} \quad I_5 = [\frac{45}{32}, \frac{23}{16}]$$

Proposition 10.3.14 Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Dire que D est dense dans $\mathbb{R}$ équivaut à dire que :

Tout réel est limite d'une suite à valeurs dans D

♣

Exercice: Preuve : • Supposons D est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in]x, x + \frac{1}{n+1}[\cap D$ est bien défini par densité de D , et ainsi on construit une suite x à valeurs dans D qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \leq x_n \leq x + \frac{1}{n+1}$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes.

• Supposons que tout réel est limite d'une suite à valeurs dans D .

Soit $]a, b[$ non vide. et x à valeurs dans D tel que $\lim x = \frac{a+b}{2}$.

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{b-a}{2}[$ quelconque, on a pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$

$$|x_N - \frac{a+b}{2}| < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$$

D'où

$$x_N \in]a, b[\cap D$$

Reformulons à présent une propriété de densité vue dans le premier chapitre

Théorème 10.3.15 (Densité) *Tout nombre réel est limite de deux suites adjacentes rationnelles.* ♣

Preuve Soit x un réel les valeurs décimales approchées par excès et par défaut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$$

définissent deux suites rationnelles adjacentes dont la limite commune est x .

En effet $\lim u - v = 0$ trivial.

Soit $y \in \mathbb{R}$

$$10 \times E(y) \leq 10y < E(10y) + 1 \quad \text{et} \quad E(10y) \leq 10y < 10 \times (E(y) + 1)$$

D'où

$$10E(y) < E(10y) + 1 \quad \text{et} \quad E(10y) < 10(E(y) + 1)$$

D'où s'agissant d'entiers

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 10E(y) \leq E(10y) \quad \text{et} \quad E(10y) + 1 \leq 10(E(y) + 1)$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x) \quad \text{et} \quad E(10^{n+1} x) + 1 \leq 10(E(10^n x) + 1)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \leq v_n$$

•

Exercice: Montrer que l'ensemble rationnels dyadiques $\{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

10.4 Relations de Comparaison

10.4.1 Définitions

Définition 10.4.1 Soient x et y deux suites. On dit que x est dominée par y et on note

$$x = \mathcal{O}(y) \text{ en } +\infty \quad \text{ou} \quad x_n = \mathcal{O}(y_n) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté $x_n = \mathcal{O}(y_n)$

$$\text{lorsque} \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad |x| \leq M|y| \text{ apcr}$$

$$i.e. \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |x_n| \leq M|y_n|$$

♠

Remarque 10.4.1 Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :

$$x_n = \mathcal{O}(y_n) \iff \left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

*

Exemple: Toute suite bornée si et seulement si elle est dominée par 1 ainsi :

$$(-1)^n = \mathcal{O}(1) \quad \sin(n) = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{n+1} = \mathcal{O}(1)$$

Exemple: On en déduit

$$(-n)^n = \mathcal{O}(n^n) \quad e^n \sin(n) = \mathcal{O}(e^n) \quad \text{et} \quad \frac{n^2 - n}{n + 1} = \mathcal{O}(n)$$

Exercice: Montrer que $x_n = \mathcal{O}(0)$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

Définition 10.4.2 Soient x et y deux suites. On dit que x est négligeable devant y et on note

$$x = o(y) \text{ en } +\infty \quad \text{ou} \quad x_n = o(y_n) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambigüité $x_n = o(y_n)$

$$\text{lorsque} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad |x| \leq \varepsilon |y| \quad \text{apcr}$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |x_n| \leq \varepsilon |y_n|$

On note aussi parfois $x \ll y$ ou $x_n \ll y_n$

♠

Remarque 10.4.2 Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :

$$x_n = o(y_n) \iff \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*

Exemple: Toute suite converge vers 0 si et seulement si elle est négligeable devant 1 ainsi :

$$\frac{1}{n} = o(1) \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) = o(1) \quad \text{et} \quad e^{-n} = o(1)$$

Exemple: On en déduit

$$n^{n-1} = o(n^n) \quad e^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = o(e^n) \quad \text{et} \quad ne^{-n} = o(n)$$

Exercice: Montrer que $x_n = o(0)$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

Définition 10.4.3 Soient x et y deux suites. On dit que x est équivalente à y et on note

$$x \sim y \text{ en } +\infty \quad \text{ou} \quad x_n \sim y_n \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

ou encore puisqu'il n'y a pas d'ambigüité $x_n \sim y_n$

$$\text{lorsque } x_n - y_n = o(y_n)$$

♠

Remarque 10.4.3 Dans la pratique lorsque y ne s'annule jamais apcr :

$$x_n \sim y_n \iff \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

*

Exemple: Toute suite converge vers $\ell \neq 0$ si et seulement si elle est équivalente à ℓ ainsi :

$$1 + \frac{1}{n} \sim 1 \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e \quad \text{et} \quad \arctan(n) \sim \frac{\pi}{2}$$

Exemple: On en déduit

$$1 + n \sim n \quad e^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e^{n+1} \quad \text{et} \quad n^n \arctan(n) \sim \frac{\pi}{2} n^n$$

Exercice: Montrer que $x_n \sim 0$ si et seulement si $x = 0$ apcr.

10.4.2 Propriétés

Lemme 10.4.1 $x = o(y) \implies x = \mathcal{O}(y)$ ♣

Preuve

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad |x| \leq \varepsilon |y| \quad \text{apcr}) \implies (\exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad |x| \leq M |y| \quad \text{apcr})$$

Exercice: la réciproque est-elle vraie ? •

Lemme 10.4.2 Si $x \sim y$ et $\lim y = \ell \neq 0 \in \overline{\mathbb{R}}$ Alors $\lim x = \ell$ ♣

Preuve Puisque $\ell \neq 0$ on a $y \neq 0$ apcr et donc $x \sim y$ signifie $\lim \frac{x}{y} = 1$, D'où

$$\lim x = \lim y \times \frac{x}{y} = \ell \times 1$$

Proposition 10.4.3 les relations $\mathcal{O}, o$ sont transitives.

Par ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \mathcal{O}(y) \\ y = o(z) \end{array} \right\} \implies x = o(z) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = o(y) \\ y = \mathcal{O}(z) \end{array} \right\} \implies x = o(z)$$

Preuve Les preuves étant similaires on ne démontrera que la dernière assertion. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque $y = \mathcal{O}(z)$ on a $|y| < M|z|$ apcr pour un certain $M \in \mathbb{R}_+^*$.

D'où puisque $x = o(y)$ on a $|x| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y|$ apcr.

Et donc

$$|x| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y| \leq \frac{\varepsilon}{M}M|z| = \varepsilon|z| \quad \text{apcr}$$

Remarque: $\mathcal{O}$ est réflexive, mais o ne l'est pas. •

Remarque: Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$x = \mathcal{O}(y) \iff x = \mathcal{O}(\lambda y) \iff \lambda x = \mathcal{O}(y)$$

$$x = o(y) \iff x = o(\lambda y) \iff \lambda x = o(y)$$

Proposition 10.4.4 la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

On dit qu'il s'agit d'une relation d'équivalence :

- **Réflexivité :** $x \sim x$
- **Symétrie** $x \sim y \iff y \sim x$
- **Transitivité :** $\left\{ \begin{array}{l} x \sim y \\ y \sim z \end{array} \right\} \implies x \sim z$ ♣

Preuve

• Réflexivité claire car $0 = o(x)$

• Montrons la symétrie. (une seule implication suffit).

Supposons $x \sim y$.

Soit $\varepsilon > 0$ on a

$$(*) \quad |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y| \quad \text{apcr} \quad \text{et} \quad (**) \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}|y| \quad \text{apcr}$$

D'où d'après (**)

$$|y| - |x| \leq |x - y| \leq \frac{1}{2}|y| \quad \text{apcr}$$

Et donc

$$|y| \leq 2|x| \quad \text{apcr}$$

Et réinjectant ceci dans (*)

$$|y - x| = |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y| \leq \varepsilon|x| \quad \text{apcr}$$

• Montrons la transitivité

Soit $\varepsilon > 0$ On a

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq \frac{\varepsilon}{4}|y| + \frac{\varepsilon}{2}|z| \quad \text{apcr}$$

Or puisque $y \sim z$ on a $|y| \leq 2|z|$ apcr (voir preuve de la symétrie), d'où

$$|x - z| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| + \frac{\varepsilon}{2}|z| = \varepsilon|z| \quad \text{apcr}$$

•

Remarque: On a vu que $x \sim y \implies x = \mathcal{O}(y)$ et $y = \mathcal{O}(x)$ On en déduit la transitivité

$$x \sim y \quad \text{et} \quad y = \mathcal{O}(z) \quad (\text{resp. } y = o(z)) \implies x = \mathcal{O}(z) \quad (\text{resp. } x = o(z))$$

Remarque: On retiendra la règle : Dans un enchaînement de comparaisons entre plusieurs fonctions, si l'une d'entre elles est un "o" alors la première fonction est négligeable devant la dernière

Proposition 10.4.5 (Compatibilité avec le produit) les relations $o, \mathcal{O}$ et $\sim$ sont compatibles avec le produit :

Quels que soient les suites x, y, X, Y on a

$$[x = \mathcal{O}(X) \quad \text{et} \quad y = \mathcal{O}(Y)] \implies xy = \mathcal{O}(XY)$$

$$[x = o(X) \quad \text{et} \quad y = o(Y)] \implies xy = o(XY)$$

$$[x \sim X \quad \text{et} \quad y \sim Y] \implies xy \sim XY \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} \sim \frac{X}{Y}$$

♣

Preuve Montrons la deuxième implication (la preuve de la première étant similaire).

Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque) on a

$$|x| \leq \sqrt{\varepsilon}|X| \quad \text{apcr} \quad \text{et} \quad |y| \leq \sqrt{\varepsilon}|Y| \quad \text{apcr}$$

D'où

$$|xy| \leq \varepsilon|XY| \quad \text{apcr}$$

Montrons la dernière implication D'après ce qui précède, puisque Soit α la suite définie par

$$\alpha_n = \frac{x_n}{X_n} \quad \text{Si } X_n \neq 0 \quad \alpha_n = 1 \text{ sinon}$$

$$\beta_n = \frac{y_n}{Y_n} \quad \text{Si } Y_n \neq 0 \quad \beta_n = 1 \text{ sinon}$$

On a alors (puisque x et X sont simultanément nuls et de même pour y et Y)

$$x = \alpha X \quad \text{et} \quad y = \beta Y$$

Puisque $x \sim X$ on a $\lim \alpha = 1$. De même $\lim \beta = 1$ D'où

$$xy = \underbrace{\alpha\beta}_{\omega} XY \quad \text{et} \quad \lim \omega = 1$$

D'où, soit $\varepsilon > 0$ on a

$$|xy - XY| = |\omega - 1||XY| \leq \varepsilon|XY| \quad \text{apcr}$$

On a donc montré que $xy \sim XY$

De même en supposant y (et donc Y) jamais nuls

$$\frac{x}{y} = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\chi} \frac{X}{Y} \quad \text{et} \quad \lim \chi = 1$$

On conclut de façon analogue que $\frac{x}{y} \sim \frac{X}{Y}$

•

Proposition 10.4.6 (Stabilité pour la somme) *les relations $o, \mathcal{O}$ sont stables pour la somme : Quels que soient les suites x, y, z on a*

$$[x = \mathcal{O}(z) \quad \text{et} \quad y = \mathcal{O}(z)] \implies x + y = \mathcal{O}(z)$$

$$[x = o(z) \quad \text{et} \quad y = o(z)] \implies x + y = o(z)$$

♣

Preuve Montrons la deuxième (la preuve de la première étant analogue).
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| \quad \text{apcr} \quad \text{et} \quad |y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| \quad \text{apcr}$$

Et donc

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z| + \frac{\varepsilon}{2}|z| = \varepsilon|z| \quad \text{apcr}$$

•

Remarque: la relation $\sim$ n'est pas compatible avec la somme :

$$n + \frac{1}{n} \sim n + 1 \quad \text{et} \quad -n \sim -n \quad \text{or} \quad \frac{1}{n} \not\sim 1$$

Remarque: De même la relation $\sim$ n'est pas compatible avec la composition

$$n^2 \sim n^2 + n \quad \text{et} \quad \text{pourtant} \quad \exp(n^2) \not\sim \exp(n^2 + n)$$

Lemme 10.4.7 (Conservation du signe) **Si $x \sim y$ Alors x et y sont du même signe apcr.**

♣

Preuve Supposons par exemple $y > 0$ apcr. alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{y} = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{y} > 0 \quad \text{apcr}$$

Et donc $x > 0$ apcr

•

Remarque: Si $x \sim y$ alors x et y sont de même nature et ont même limite (finie ou infinie) éventuelle.

Exemple:

Puisque par dérivation

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• On en déduit

$$\sin(1/n) \sim \frac{1}{n} \quad 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

• On en déduit

$$\underbrace{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}}_{\text{transitivité}} = o(1/n) \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = o(1/n) \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = o(1/n)$$

c'est à dire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

• On a de même par produit d'équivalents

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1 \implies \lim \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e$$

c'est à dire

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$$

10.4.3 Caractérisation et Suites référence

Proposition 10.4.8 Soit u une suite réelle telle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

Si $\ell > 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$

Si $\ell < 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

♣

Preuve plaçons-nous dans le deuxième cas.

Si $\ell = 0$ le résultat est trivial, supposons donc $\ell > 0$ On a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2} \quad \text{apcr}$$

Soit pour un certain rang N on a

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - \ell \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2}$$

Posons $q = \frac{1+\ell}{2}$ on a $q \in [0, 1[$ et

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q$$

Et donc par produit télescopique

$$\forall p \geq N, \quad \left| \frac{u_p}{u_N} \right| = \prod_{n=N}^{p-1} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q^{p-N}$$

(On aurait pu obtenir cet encadrement par une simple récurrence). Et donc puisque $q^{p-N} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ on conclut grâce au théorème des gendarmes

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 0$$

Autre Méthode

Par quantification de la limite on a $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ apcr.

Et donc la suite $|u|$ est décroissante apcr minorée par 0 elle converge donc vers une limite finie $\lambda \geq 0$.

Si par $\lambda > 0$ alors par passage à la limite

$$1 > \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

ce qui est absurde donc u converge vers 0

Dans le cas $\ell > 1$ on applique le résultat que l'on vient de démontrer à la suite $1/|u|$

•

Remarque: si $\ell = 1$ on ne peut rien dire cf $u_n = (-1)^n$

Exercice: Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$

Lemme 10.4.9 Si x et y sont strictement positives et vérifient

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{apcr}$$

alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$

♣

Preuve Soit N le rang à partir duquel l'encadrement est vérifié. la suite $\frac{x}{y}$ est alors décroissante positive à partir du rang N , d'où

$$\left| \frac{x}{y} \right| \leq \left| \frac{x_N}{y_N} \right| \quad \text{apcr}$$

D'où en posant $M = \left| \frac{x_N}{y_N} \right|$, on a

$$\left| \frac{x}{y} \right| \leq M \quad \text{apcr}$$

•

Lemme 10.4.10 Soit $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ et u une suite réelle.

$$\text{Si } u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \quad \text{Alors } u_n \sim (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

♣

Démonstration Par convergence au sens de Cesaro on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = \frac{u_n^\alpha}{n} - \frac{u_0^\alpha}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lambda$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^{1/\alpha}} = \lambda^{1/\alpha}$$

•

Exercice: Donner un équivalent simple de u avec $u_{n+1} = \sqrt{\frac{7n}{n+1} + u_n^2}$

Lemme 10.4.11 (Echelles de Comparaison)

$$0 < a < b \implies a^n \ll b^n$$

$$\alpha < \alpha' \implies n^\alpha \ll n^{\alpha'}$$

$$\beta < \beta' \implies (\ln n)^\beta \ll (\ln n)^{\beta'}$$

♣

Preuve Il suffit de calculer les limites des quotients

•

Théorème 10.4.12

$$a^n \ll n^\alpha \ll (\ln n)^\beta \ll n^{\alpha'} \ll b^n \ll n! \ll n^n$$

avec $0 < a < 1 < b$ $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha < 0 < \alpha'$

♣

Démonstration

• Montrons que $n^\alpha \ll (\ln n)^\beta \ll n^{\alpha'}$.

C'est le théorème de croissance comparée.

• Montrons que $n^{\alpha'} \ll b^n$.

Posons $u_n = \frac{n^{\alpha'}}{b^n} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \in]0, 1[$$

D'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• Montrons que $b^n \ll n!$.

Posons $u_n = \frac{b^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

• Montrons que $n! \ll n^n$.

Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/e \in]0, 1[$$

D'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• Montrons que $a^n \ll n^\alpha$

En effet $n^{-\alpha} \ll (1/a)^n$

•

10.5 Brève extension aux suites complexes

Définition 10.5.1 On définit par extension les suites complexes comme toute famille de complexes indexée par $\mathbb{N}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

♠

Remarque: La notion de suite extraite est identique à celle correspondant aux suites réelles.

Remarque 10.5.1 Les notions de suite croissante, décroissante, majorée ou minorée n'ont aucun sens s'agissant de suites complexes. *

En revanche la notion de suite bornée peut-être étendue aux suites complexes ainsi :

Définition 10.5.2 On dit qu'une suite u est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

♠

Exercice: Montrer que : u est bornée $\iff u$ est bornée a.p.c.r

Définition 10.5.3 Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, on dit que u converge vers ℓ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

lorsque $\lim |u - \ell| = 0$, c'est à dire lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

♠

Remarque: vu la quantification, on retrouve facilement certaines propriétés comme l'unicité de la limite d'où la notation

$$\lim u = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Lemme 10.5.1 Toute suite complexe convergente est bornée.

♣

Proposition 10.5.2 Les résultats sur les limites d'une combinaison linéaire (resp. un produit, resp. un quotient) de suites réelles convergentes s'étendent aux suites complexes convergentes.

♣

Proposition 10.5.3 Si u et v sont deux suites complexes telles que

$$|u| \leq |v| \quad \text{a.p.c.r} \quad \text{et} \quad \lim v = 0$$

Alors $\lim u = 0$

♣

On définit $\alpha := \operatorname{Re}(u)$, $\beta := \operatorname{Im}(u)$ et $v := \bar{u}$ les suites définies à partir de u par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \operatorname{Re}(u_n) \quad \beta_n = \operatorname{Im}(u_n) \quad \text{et} \quad v_n := \bar{u}_n$$

Proposition 10.5.4 Soient u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, alors

$$\lim u = \ell \iff (\lim \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(\ell))$$

♣

Démonstration Reprenons les notations ci-dessus avec $\ell = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| = \sqrt{|\alpha_n - x|^2 + |\beta_n - y|^2}$$

• Montrons $\Rightarrow$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_n - x| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |\beta_n - y| \leq |u_n - \ell|$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes

• Montrons $\Leftarrow$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq (|\alpha_n - x| + |\beta_n - y|)$$

D'où la conclusion par le théorème des gendarmes

Corollaire 10.5.5 *Les opérations algébriques sur les sommes, produits, quotients ou combinaisons linéaires de suites convergentes s'étend au cas complexe.*

De plus :

Si $\lim u = \ell$ **Alors** $\lim \bar{u} = \bar{\ell}$

Preuve Il suffit de regarder les limites de la partie réelle et imaginaire de u

Remarque 10.5.2 *Une deuxième preuve des deux propositions précédentes consiste à prouver tout d'abord que $\lim u = \lim \bar{u}$ en passant à la limite dans l'égalité*

$$|u - \ell| = |\bar{u} - \bar{\ell}|$$

Puis par colinéarité de la limite lorsque $\lim u = \ell$

$$\lim \operatorname{Re}(u) = \lim \frac{u + \bar{u}}{2} = \frac{\ell + \bar{\ell}}{2} = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim \operatorname{Im}(u) = \lim \frac{u - \bar{u}}{2} = \frac{\ell - \bar{\ell}}{2} = \operatorname{Im}(\ell)$$

Et réciproquement si les limites des parties réelles et imaginaires sont telles que ci-dessus on a, par colinéarité de la limite :

$$\lim u = \lim \operatorname{Re}(u) + i \lim \operatorname{Im}(u) = \lim \operatorname{Re}(u) + i \lim \operatorname{Im}(u)$$

*