Table des matières

13 Entiers Naturels, Ensembles finis, Dénombrements **3**

13.1 Nombres entiers Naturels 3

13.2 Ensembles finis 5

13.3 Opérations sur les ensembles finis 7

13.4 Dénombrements 10

13.5 Ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ 12

Chapitre 13

Entiers Naturels, Ensembles finis, Dénombrements

13.1 Nombres entiers Naturels

Définition 13.1.1 *l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ est muni d'une application appelée successeur :*

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

s et $\mathbb{N}$ sont telles que :
- *s est bijective*
- *$\mathbb{N}$ vérifie le principe de récurrence : Pour tout $A \subset \mathbb{N}$ on a*

$$\left.\begin{array}{c} 0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \mathbb{N}$$

On munit $\mathbb{N}$ des opérations algébriques $+$ et $\times$ et de la relation d'ordre totale $\leq$ usuelles. ♠

Remarque: C'est à l'aide du principe de récurrence que se justifie le raisonnement par récurrence.

Remarque: l'opération $+$ et $\times$ se construisent par récurrence.

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad m \leq n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}; \quad n = m+k$$

On voit bien que $\leq$ est compatible avec l'addition et donc avec la multiplication.

Exercice: Montrer que

$$\forall (m,n,k) \in \mathbb{N}^3, \quad m+k = n+k \Longrightarrow m = n$$
$$\forall (m,n,k) \in \mathbb{N}^3, \quad m+k \leq n+k \Longrightarrow m \leq n$$
$$\forall (m,n,k) \in \mathbb{N}^3, \quad m+k < n+k \Longrightarrow m < n$$

Proposition 13.1.1 *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément* ♣

Démonstration Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide
Supposons par l'absurde qu'il n'admette pas de plus petit élément, posons

$$X := \{n \in \mathbb{N} \mid \quad \forall k \leq n, \ \ k \notin A\}$$

Montrons que X vérifie le principe de récurrence.

• $0 \in X$ car dans le cas contraire on aurait $0 \in A$ qui serait un plus petit élément.

• Soit $n \in X$ quelconque et supposons $n \in X$, montrons que $n+1 \in X$.
En effet dans le cas contraire on aurait pour un certain $k \leq n+1, \quad k \in A$.

Et donc $k = n+1$ car dans le cas contraire $k \in A$ et $k \leq n$ ce qui contredit $n \in X$.
D'où puisque $n+1 \in A$ et $n \in X$, on aurait

$$\forall k \leq n, \quad k \notin A \quad \text{et} \quad n+1 \in A$$

Et donc (par disjonction de cas) : $\forall p \in A, \qquad p \geq n+1$
Ce qui est contradictoire avec le fait que A n'admet pas de plus petit élément.

• Conclusion :
X vérifie le principe de récurrence, d'où $X = \mathbb{N}$ et donc $A = \emptyset$ ce qui est absurde. •

Proposition 13.1.2 *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.* ♣

Démonstration Soit $M \in \mathbb{N}$ un majorant de A (non vide). Il suffit d'appliquer ce qui précède à $M - A$.
En effet

$$X := \{n \in \mathbb{N} \quad | \quad \exists k \in A; \quad M = n + k \in A\}$$

est non vide car pour $k \in A$, on a $k \leq M$ et donc peut trouver $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $M = p + k$, d'où $p \in X$.
D'après la proposition précédente on en déduit que X admet un plus petit élément m.
Puisque $m \in X$ on peut écrire $M = m + \alpha$ avec $\alpha \in A$.

Montrons que α est le plus petit élément de A.
Si par l'absurde on peut trouver $k \in A$ tel que $k > \alpha$ alors,

$$m + k > m + \alpha = M$$

Or $k \in A$ et donc $k \leq M$ i.e $M = n + k$ avec $n \in \mathbb{N}$ en particulier $n \in X$. D'où

$$m + k > n + k \qquad \text{et donc} \qquad m > n \quad \text{avec} \quad n \in X$$

Ce qui contredit le fait que m minore X •

Définition 13.1.2 *Soit E un ensemble quelconque. On définit une suite à éléments dans E toute famille u indexée par $\mathbb{N}$ d'éléments de E*

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Où de façon équivalente toute application $u : \mathbb{N} \to E$, on note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites. ♠

Proposition 13.1.3 *Soient f, g, h trois fonctions définies sur E, $\mathbb{N} \times E$ et $E \times E$ respectivement (à valeurs dans E).*
Soient a et b quelconques dans E, alors il existe une et une seule suite u vérifiant

$$u_0 = a \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

$$resp. u_0 = a \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(n, u_n)$$

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+2} = h(u_n, u_{n-1})$$

Il est bien entendu que l'on peut étendre cette proposition à toute autre type de construction par récurrence.
♣

Exemple: les suites réelles u, v, w, f ci-dessous sont bien définies :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

$$v_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = q \cdot v_n$$

$$w_0 = w_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} = (n+1) \cdot w_n$$

$$f_0 = f_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Il s'agit d'une suite arithmétique, géométrique, de la suite factorielle $[(a + rn), (a \cdot q^n), (n!)]$ et de la suite de Fibonacci.

13.2 Ensembles finis

Dans toute la suite on note pour a, b dans $\mathbb{N}$ avec $a < b$

$$[\![a, b]\!] := \{n \in \mathbb{N} \quad | \quad a \leq n \leq b\}$$

Proposition 13.2.1 (Admis) *Soit $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$, on a f bijective $\Longrightarrow p = n$* ♣

Définition 13.2.1
Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que E est fini de cardinal n, et on note $Card\, E = n$, lorsque l'on peut trouver une bijection :

$$f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$$

Par convention on pose $Card\, \emptyset = 0$.
E est dit infini lorsqu'il n'est pas fini. ♠

Exemple: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a Card $[\![1, n]\!] = n$ (prendre $f = Id_{[\![1,n]\!]}$). $\mathbb{N}$ est infini

Remarque: Si $(a, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a Card $[\![a, a + n]\!] = n + 1$.
(prendre $f : [\![1, n]\!] \to [\![a, a + n]\!]$ avec $f(n) = a + n - 1$)

Proposition 13.2.2 *Soit E un ensemble fini. Tout ensemble F bijectif à E est fini de même cardinal.* ♣

Démonstration La composition de deux bijections est une bijection :

$$[\![1, n]\!] \xrightarrow{bijection} E \xrightarrow{bijection} F$$

•

Proposition 13.2.3 *Soit E fini et F une partie de E ($F \subset E$), on a*
- *Pour tout $a \in E$, $\quad Card E \setminus \{a\} = Card\, E - 1$*
- *F est fini et $Card\, F \leq Card\, E$*
- *$E = F \Longleftrightarrow Card\, E = Card\, F$*

♣

Démonstration
• **<u>Première assertion :</u>** En notant $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (tous deux à deux distincts). On pour $a \in E$ quelconque $a = x_p$ pour un p (unique) pris dans $[\![1, n]\!]$.

$$E \setminus \{a\} = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$$

avec $y_i = x_i$ si $i < p$ et $y_i = x_{i+1}$ si $i \geq p$. (ils sont 2 à 2 distincts)
Plus rigoureusement Soit $f : [\![1, n]\!] \to E$ bijective
Soit $a \in E$ et $p \in [\![1, n]\!]$ l'unique antécédent de a. f induit une bijection $\widetilde{f} : [\![1, n]\!] \setminus \{p\} \to E \setminus \{a\}$.
On pose $\varphi : [\![1, n]\!] \setminus \{p\} \to [\![1, n - 1]\!]$ avec pour $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$ quelconque

$$\varphi(k) = k \quad \textbf{Si } k < p \qquad \text{et} \qquad \varphi(k) = k - 1 \quad \textbf{Si } k > p$$

φ étant bijective (le vérifier) on en déduit $\widetilde{f} \circ \varphi^{-1} : [\![1, n - 1]\!] \to E \setminus \{a\}$ est bijective
• **<u>Deuxième assertion :</u>**
Soit pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque

$$\mathcal{P}(n) : \text{"Quels que soient E et F, on a} \quad \text{Card}\, E = n \quad \text{et} \quad F \subset E \Longrightarrow \text{Card}\, F \leq n\text{"}$$

• $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifié.
Soient E avec Card $E = n + 1$ et $F \subset E$ (avec $F \neq E$ car sinon trivial).
Soit $a \in E \setminus F$ on a alors $F \subset E \setminus \{a\}$ et d'après la première assertion Card $E \setminus \{a\} = n$ d'où d'après $\mathcal{P}(n)$

$$\text{Card}\, F \leq \text{Card}\, E \setminus \{a\} = n \leq \text{Card}\, E$$

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

• Troisième assertion :
La réciproque étant triviale supposons $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.
Puisque $F \subset E$ si par l'absurde $E \neq F$ on peut trouver $a \in E \setminus F$, d'où

$$F \subset E \setminus \{a\}$$

Et donc d'après ce qui précède :

$$\operatorname{Card} F \leq \operatorname{Card} E \setminus \{a\} = \operatorname{Card} E - 1 < \operatorname{Card} E$$

d'où la contradiction. •

Lemme 13.2.4 *Soit $f : E \to F$ avec E fini. Alors $f(E)$ est une partie finie de F et*

$$\mathit{Card}\, f(E) \leq \mathit{Card}\, E$$

♣

Démonstration En notant $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour tout $y \in f(E)$, on pose $\theta(y) = x_k$ où k est le plus petit indice i tel que $f(x_i) = y$.
On a alors $\theta : f(E) \to E$ est injective et donc bijective de E dans $\theta(E) \subset E$. D'où

$$\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} \theta(E) \leq \operatorname{Card} E$$

Plus rigoureusement :
soit $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$ bijective.
Pour tout $y \in f(E)$, $\varphi(f^{-1}(\{y\}))$ est une partie non vide de $[\![1, n]\!] \subset \mathbb{N}$, On définit alors $\theta : f(E) \to [|1, n|]$ par

$$\forall y \in f(E), \qquad \theta(y) := \min \varphi(f^{-1}(\{y\}))$$

Elle est injective car

$$\forall (y, z) \in f(E)^2, \qquad y \neq z \Longrightarrow f^{-1}(\{y\}) \neq f^{-1}(\{z\}) \Longrightarrow \varphi(f^{-1}(\{y\})) \quad \text{et} \quad \varphi(f^{-1}(\{z\})) \quad \mathit{disjoints}$$

Et donc $\varphi^{-1} \circ \theta : f(E) \to E$ est injective elle induit donc une bijection entre $f(E)$ et son image $A \subset E$. D'où

$$\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} E$$

•

Proposition 13.2.5
Soient E et F finis avec $\mathit{Card}\, E = \mathit{Card}\, F$. Soit $f : E \to F$ Les assertions suivantes sont alors equivalentes
(i) f est bijective
(ii) f est surjective
(iii) f est injective

♣

Démonstration Il est clair que $(i) \Longrightarrow (ii) \quad (i) \Longrightarrow (iii) \quad (ii) \quad \text{et} \quad (iii) \Longleftrightarrow (i)$.
Il suffit de Montrer que $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$, ou encore $non(ii) \Longleftrightarrow non(iii)$.
• **Supposons $f : E \to F$ non injective et surjective**, on peut donc trouver $p \neq q$ tels que $f(p) \neq f(q)$.
Donc f induit une surjection $\widetilde{f} : E \setminus \{p\} \to F$ et donc $\widetilde{f}(E \setminus \{p\}) = F$, d'où

$$\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} \widetilde{f}(E \setminus \{p\}) \leq \operatorname{Card} E \setminus \{p\} = \operatorname{Card} E - 1 = \operatorname{Card} F - 1$$

D'où la contradiction.
• **Supposons $f : E \to F$ injective et non surjective**, alors on peut trouver $f(E) \subsetneq F$ et donc $\operatorname{Card} f(E) < \operatorname{Card} F$ or f induit une bijection $\widetilde{f} : E \to f(E)$ d'où $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$

$$\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) < \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$$

D'où la contradiction •

Exercice: Soit $f : E \to F$ avec E fini. Montrer que

$$\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E \Longleftrightarrow f \ \ \mathit{injective}$$

Corollaire 13.2.6 *Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$*
(i) **Si** *f est injective* **Alors** *$\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$*
(ii) **Si** *$\mathrm{Card}\, E > \mathrm{Card}\, F$* **Alors** *$f$ non injective*

♣

Démonstration Soit $\widetilde{f} : E \to f(E)$ induite par f, on a

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow \widetilde{f} \text{ bijective} \Longleftrightarrow \mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, f(E)$$

D'où f injective $\Longrightarrow \mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, f(E) \leq \mathrm{Card}\, F$ car $f(E) \subset F$.
Et donc (i) est prouvé et (ii) aussi par contraposée •

Remarque 13.2.1 *L'assertion (ii) porte le nom de principe des tiroirs car on ne peut ranger $\mathrm{Card}\, E$ paires chaussettes dans $\mathrm{Card}\, F$ tiroirs sans avoir à ranger au moins 2 paires dans un même tiroir lorsque $\mathrm{Card}\, E > \mathrm{Card}\, F$* *

Proposition 13.2.7 *Soit $P \subset \mathbb{N}$ non vide. P est majoré si et seulement si P est fini* ♣

Preuve Si $P \subset \mathbb{N}$ est majoré par $n \in \mathbb{N}$ alors $P \subset [|0, n|]$ et donc $\mathrm{Card}\, P \leq n + 1$.
Réciproquement, Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{Q}(n) : \text{"}\forall P \subset \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Card}\, P = n \Longrightarrow P \ \textit{majoré}\text{"}$$

• $\mathcal{Q}(1)$ est clair car alors P est majoré par son unique élément.
• Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vérifié pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Montrons $\mathcal{Q}(n+1)$.
Soit $P \subset \mathbb{N}$, avec $\mathrm{Card}\, P = n + 1$. Soit $a \in P$ et $A := P \setminus \{a\}$, on a $\mathrm{Card}\, A = n$ d'où d'après $\mathcal{Q}(n)$, A admet un majorant M, il est donc clair que $P = A \cup \{a\}$ admet $\max(M, a)$ pour majorant. •

Proposition 13.2.8 *Soit $P \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.*
Il existe une ***unique bijection strictement croissante*** *$f : [|1, n|] \to P$* ♣

Preuve Existence :
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{Q}(n) : \text{"}\forall P \subset \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Card}\, P = n \Longrightarrow \exists f : [|1, n|] \to P \ \textit{bijective} \ \nearrow\text{"}$$

• $\mathcal{Q}(1)$ est clair (voir fonction $1 \mapsto a$ avec $P = \{a\}$).
• Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé qcq. Mq $\mathcal{Q}(n+1)$ est vérifiée.
Soit $P \subset \mathbb{N}$ avec $\mathrm{Card}\, P = n + 1$.
En particulier P est majoré et non vide, il admet un plus grand élément a.
D'après $\mathcal{Q}(n)$ on peut trouver $f : [\![1, n]\!] \to P \setminus \{a\}$ bijection strictement croissante, on prolonge celle-ci de façon strictement croissante à $f : [|1, n+1|] \to P$ en posant $f(n+1) = a$, et c'est une bijection.

Montrons l'**unicité** : Soit $P \subset \mathbb{N}$ non vide et $f, g : [|1, n|] \to P$ deux bijections croissantes (strictement).
Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in [\![1, n]\!]$ tel que $f(x) \neq g(x)$ par exemple $f(x) < g(x)$, d'où par stricte croissance de g^{-1}

$$g^{-1}(f(x)) < x$$

Or comme on l'a vu dans le chapitre des suites, puisque $g^{-1} \circ f$ est strictement croissante de $[\![1, n]\!] \subset \mathbb{N}$ sur lui-même, on a :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad g^{-1}(f(p)) \geq p$$

D'où la contradiction. •

13.3 Opérations sur les ensembles finis

Lemme 13.3.1 *Soient A et B disjoints (i.e. $A \cap B = \emptyset$) si ils sont finis leur union (notée parfois $A \sqcup B$)l'est aussi et on a*

$$\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A \sqcup B = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$$

♣

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

Démonstration Soient m, n les cardinaux de A et B.
Soit $f_A : [\![1, m]\!] \to A$ et $f_B : [\![m+1, m+n]\!] \to B$ deux bijections.
Puisque $A \cap B = \emptyset$ l'application ci-dessous

$$f : x \mapsto \begin{cases} f_A(x) & \textbf{Si} \quad x \in A \\ f_B(x) & \textbf{Si} \quad x \in B \end{cases}$$

réalise une bijection entre $[\![1, n+m]\!]$ et $A \cup B$

•

Corollaire 13.3.2 *Soient $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ ensembles 2 à 2 disjoints, i.e. :*

$$\forall (p,q) \in [\![1, n]\!], \quad p \neq q \Longrightarrow A_p \cap A_q = \emptyset$$

Si tous ces ensembles sont de cardinal fini il en va de même de leur union et

$$Card\,(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = Card\,(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} Card\, A_k$$

♣

Démonstration soit

$$\mathcal{Q}(n) : \text{"Quels que soient } A_1, \ldots, A_n \text{ finis et 2 à 2 disjoints, on a } \operatorname{Card}(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card} A_k$$

$\mathcal{Q}(2)$ clair.
Et si pour $n \geq 2$, $\mathcal{Q}(n)$ est vérifié, on a pour toute famille $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ finis 2 à 2 disjointes. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et A_{n+1} sont disjoints et finis, d'après le lemme précédent

$$\operatorname{Card}(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) = \operatorname{Card}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}) = \operatorname{Card}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \operatorname{Card} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card} A_k + \operatorname{Card} A_{n+1}$$

•

Proposition 13.3.3 *Soient A et B deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et de plus*

$$Card\, A \cup B = Card\, A + Card\, B - Card\, A \cap B$$

♣

Démonstration On a

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B \qquad \text{et} \qquad A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$$

En effet ces réunions sont disjointes (on parle alors de partition).
Et par ailleurs

$$A \setminus B \subset A \Longrightarrow (A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$$

Et réciproquement soit $x \in A \cup B$.
Si $x \in B$ alors $x \in (A \setminus B) \sqcup B$.
Sinon $x \in (A \cup B) \setminus B = A \setminus B \cup B \setminus B = A \setminus B$.
D'où la première égalité.
Enfin la deuxième provient de

$$A \setminus B \subset A \qquad \text{et} \qquad A \cap B \subset A$$

D'où la première inclusion, la deuxième provenant du fait que pour $x \in A$, on a :
Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B \subset (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$.
sinon $x \in A \setminus B \subset (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$

D'où d'après le Lemme

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card} B \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Card} A = \operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card}(A \cap B)$$

D'où la conclusion. •

Remarque 13.3.1 *On a démontré que pour $A \subset E$ avec E fini.*

$$Card\, E \setminus A = Card\, E - Card\, A$$

*

Exercice: Calculer Card $A \cup B \cup C$

Proposition 13.3.4 *Si A et B sont finis il en va de même pour $A \times B$, de plus*

$$Card\, A \times B = Card\, A \times Card\, B$$

♣

Démonstration On suppose $A \neq \emptyset$ sinon c'est évident $0 = 0\times?$. Si $A = \{a\}$ alors $A \times B$ et B sont de même cardinal car $(a, x) \mapsto x$ est une bijection de l'un sur l'autre.
Dans le cas où

$$A := \bigsqcup_{k \in [\![1,p]\!]} \{a_k\} \qquad \text{D'où} \quad A \times B = \bigsqcup_{k \in [\![1,p]\!]} \{a_k\} \times B$$

Et donc

$$\text{Card}\, A \times B = \sum_{k=1}^{p} \text{Card}\, \{a_k\} \times B = \sum_{k=1}^{p} \text{Card}\, B = p \cdot \text{Card}\, B = \text{Card}\, A \times \text{Card}\, B$$

•

Corollaire 13.3.5 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A fini, alors A^p est fini et*

$$Card\, A^p = (Card\, A)^p$$

♣

Proposition 13.3.6 *Soient E, F deux ensembles finis, l'ensemble F^E (parfois noté $\mathcal{F}(E, F)$) des applications de E dans F est fini et*

$$Card\, F^E = (Card\, F)^{Card\, E}$$

♣

Démonstration Dans le cas où $E = \emptyset$ il n'y a q'une application dans F^E (de graphe vide).
Supposons alors $E := \{a_1, \ldots, a_p\}$.
Alors

$$\theta : \begin{array}{ccc} F^E & \to & F^p \\ f & \mapsto & (f(a_1), \ldots, f(a_p)) \end{array}$$

est bijective :
En effet toute fonction de F^E est entièrement définie par ses images, d'où l'injectivité.
Et par ailleurs étant donné $(b_1, \ldots, b_p)$ quelconque dans F^p l'ensemble

$$\{(a_k, b_k) \quad | \quad k \in [\![1, p]\!]\}$$

définit bien un graphe dans $E \times F$, d'où la surjectivité.
On en déduit :

$$\text{Card}\, F^E = \text{Card}\, F^p = (CardF)^p = (\text{Card}\, F)^{\text{Card}\, E}$$

•

Corollaire 13.3.7 *Soit E un ensemble fini alors, l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ est fini et*

$$Card\, \mathcal{P}(E) = 2^{Card\, E}$$

♣

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

Preuve L'application qui à toute partie F de E associe sa fonction caractéristique

$$\chi_F : x \mapsto \begin{cases} 1 & \textbf{Si} \quad x \in F \\ 0 & \textbf{Si} \quad x \in E \setminus F \end{cases}$$

réalise une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$. D'où

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = \operatorname{Card} \{0,1\}^E = 2^{\operatorname{Card} E}$$

•

13.4 Dénombrements

Définition 13.4.1 *Soit E, F deux ensembles fini. On note $\sigma(E,F)$ l'ensemble des bijections de E dans F. Toute bijection de $\sigma(E) = \sigma(E,E)$ est appelée une permutation de E* ♠

Proposition 13.4.1 **Si** *$\operatorname{Card} E = n$* **Alors** *$\operatorname{Card} \sigma(E) = n!$* ♣

Preuve Soit $\mathcal{P}(n)$: "Qq soit E, F, $\quad \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F = n \Longrightarrow \operatorname{Card} \sigma(E,F) = n!$".
• $\mathcal{P}(0)$ vrai car $\operatorname{Card} \sigma(\emptyset) = 1$.
• Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifié pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Soient E, F de cardinal $n+1$. et $a \in F$ quelconque
Pour chaque $k \in E$ fixé, on pose $\sigma_k(E,F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \sigma_k(E)$ telles que $f(k) = a$.
Comme

$$\theta : \begin{array}{ccc} \sigma_k(E,F) & \to & \sigma(E \setminus \{k\}, F \setminus \{a\}) \\ f & \mapsto & \widetilde{f} : E \setminus \{k\} \to F \setminus \{a\} \end{array}$$

est bijective, et d'après $\mathcal{P}(n)$ on a

$$\forall k \in E, \qquad \operatorname{Card} \sigma_k(E,F) = \operatorname{Card} \sigma(E \setminus \{k\}, F \setminus \{a\}) = n!$$

On a bien évidemment

$$\sigma(E,F) = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} \sigma_k(E \setminus \{k\}, F \setminus \{a\})$$

D'où

$$\operatorname{Card} \sigma(E,F) = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Card} \sigma_k(E \setminus \{k\}, F \setminus \{a\}) = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

• Conclusion.... •

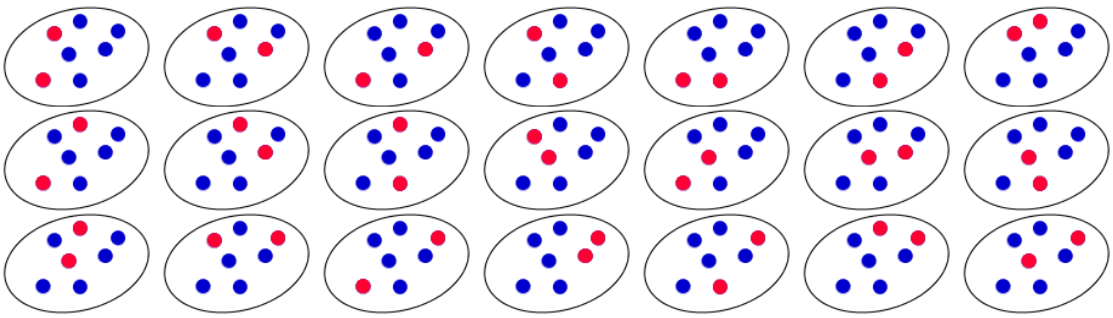
Exercice: Combien de mots peut-on écrire à l'aide des lettres A, B, C, D, E, F (ces lettres apparaissant une et une seule fois dans le mot)

Définition 13.4.2
Soit E fini de cardinal n. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal p, appelées parfois p-combinaisons.
On note C_n^p ou encore $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$. ♠

Exemple: $\mathcal{P}_0(E) = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}_n([\![1,n]\!]) = \{[\![1,n]\!]\}$.

$$\mathcal{P}_2([|1,4|]) = \Big\{\{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}\Big\}$$

Exercice: Voici les 21 facons d choisir 2 objets parmi 21 (on a colorié en rouge les éléments conservés).



De combien de facons peut-on choisir 5 objets parmi 21 ? (quel code couleur proposez-vous ?)

Proposition 13.4.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. pour $p > n$, on a $C_n^p = 0$.*
Et pour $p \in [|0, n|]$, on a

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad et \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Et la relation du triangle de Pascal.

$$\textbf{Si } n > 1 \quad et \quad p > 1, \quad \textbf{Alors} \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

♣

Preuve La première relation est évidente.
Soit E de cardinal n Par ailleurs puisque

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(E) & \to & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ X & \mapsto & E \setminus X \end{array}$$

est bijective, on en déduit la deuxième relation. la troisième provient du fait que

$$\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$$

Enfin la relation du triangle de Pascal est conséquence de la bijectivité de :

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(E) & \to & \mathcal{P}_{p-1}(E \setminus \{a\}) \sqcup \mathcal{P}_p(E \setminus \{a\}) \\ X & \mapsto & X \setminus \{a\} \end{array}$$

la bijectivité de cette dernière provient de

$$\forall Y \in \mathcal{P}_{p-1}(E \setminus \{a\}) \sqcup \mathcal{P}_p(E \setminus \{a\}), \qquad \theta^{-1}(Y) = Y \cup \{a\} \ \textbf{ Si } \ \operatorname{Card} Y = p-1 \quad \text{et} \quad \theta^{-1}(Y) = Y \ \textbf{ Si } \ \operatorname{Card} Y = p$$

•

Proposition 13.4.3 *Pour tout $0 \leq p \leq n$ on a*

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

♣

Preuve Soit $\mathcal{Q}(n)$: "$\forall p \in [0, n], \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$".
• $\mathcal{Q}(0)$ vrai car $C_0^0 = 1$ en effet $\mathcal{P}_0(\emptyset) = \{\emptyset\}$
• Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vérifié pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Pour tout $p \in [|1, n+1|]$, la relation du triangle de Pascal nous donne.

$$C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p = \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!(p + (n-p+1))}{(n-p+1)!p!}$$

Or on a de facon évidente $C_{n+1}^0 = 1$ car $\mathcal{P}_0([|1, n+1|]) = \{\emptyset\}$ •

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

Remarque 13.4.1 *On en déduit les formules souvent utiles :*

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} \qquad \text{et} \qquad C_n^p = \frac{n-p+1}{p} C_n^{p-1}$$

*

Lemme 13.4.4 (des Bergers)
• *Soit* $E = \bigsqcup_{k=1}^{N} F_k$ **Si** $F_1, \ldots, F_N$ *sont finis et de même cardinal* $p \in \mathbb{N}$, **Alors** E *est de cardinal fini et*

$$Card\, E = Np$$

• *Soit* $f : E \to F$ *tel que* F *soit fini.*
Si *tout* $y \in F$ *admet exactement* $p \in \mathbb{N}^*$ *antécédents par* f **Alors** E *est fini et*

$$Card\, E = Np \quad \text{avec } N \in \mathbb{N}$$

En particulier $N = Card\, F$ *est le nombre d'images distinctes par* f ♣

Preuve • simple récurrence

• les ensembles $(f^{-1}(\{y\}))_{y \in F}$ sont soit deux à deux identiques soit disjoints, on peut alors en conserver un nombre fini N deux à deux disjoints on les notes $F_1, \ldots, F_N$, ils forment une partition de E et on conclut grâce à la première assertion. •

13.5 Ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

On étend la structure algébrique (somme et produit) ainsi que la relation d'ordre totale à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Construit à partir de $\mathbb{N}$ par symétrisation par rapport à $+$

Tout élément $x \in \mathbb{Z}$, admet un symétrique noté $-x \in \mathbb{Z}$.

On dira qu'un relatif x est positif lorsqu'il est naturel et on note $x \geq 0$.
On étend ainsi la relation d'ordre à $\mathbb{Z}$ par

$$(*) \qquad x \leq y \Longleftrightarrow y - x \geq 0$$

La relation d'ordre est totale et compatible avec la somme et le produit de quantités positives.

A partir de $\mathbb{Z}$ on construit par symétrisation par rapport à $\times$ l'ensemble des rationnels. Qui prolonge la structure algébrique de $\mathbb{Z}$ de façon à pouvoir dire :
Tout rationnel $r \neq 0$ admet un symétrique par rapport à $\times$, on le note $1/r$.

Tout rationnel admet une représentation fractionnaire de la forme

$$\frac{p}{q} \qquad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{N}^*$$

Somme et produit sont ainsi caractérisés par

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb + qa}{bq} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{a}{b} = \frac{p \times a}{q \times b}$$

On définit les rationnels positifs comme-ceux dont une représentation fractionnaire s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \geq 0$. (rappelons que $q > 0$). Et on étend par $(*)$ la relation d'ordre à $\mathbb{Q}$. Celle-ci est totale et compatible avec l'addition et le produit de quantités positives.

On définit sur $\mathbb{Q}$ comme sur $\mathbb{R}$ la valeur absolue par

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad |r| = r \quad \textbf{Si} \;\; r \geq 0 \quad \text{et} \quad |r| = r \quad \textit{sinon}$$