

Table des matières

16 Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles	3
16.1 Fonctions continues par morceaux	3
16.1.1 Subdivisions et fonctions en escalier	3
16.1.2 Fonctions continues par morceaux	4
16.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux	6
16.2.1 Cas d'une fonction en escalier	6
16.2.2 Cas d'une fonction continue par morceaux	9
16.3 Propriétés de l'intégrale	10
16.3.1 Croissances et Linéarité	10
16.3.2 Structure euclidienne de $\mathcal{C}(I)$	14
16.4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes	18

Chapitre 16

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Dans tout ce chapitre on considère des fonctions définies sur un segment $[a, b]$

16.1 Fonctions continues par morceaux

16.1.1 Subdivisions et fonctions en escalier

Définition 16.1.1 On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $\sigma := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

La quantité

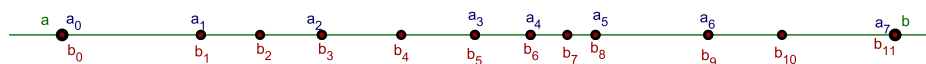
$$\delta(\sigma) := \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_{i+1} - a_i|$$

est ce qu'on appelle le pas de la subdivision.

On dit que la subdivision $\sigma' := (b_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est plus fine que σ lorsque

$$\{a_0, \dots, a_n\} \subset \{b_0, \dots, b_m\}$$

On notera ici $\sigma' \prec \sigma$



Exercice: Montrer que la relation " $\prec$ " est une relation d'ordre non totale

Exercice: Montrer que **Si** $\sigma' \prec \sigma$ **Alors** $\delta(\sigma') \leq \delta(\sigma)$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice: Pour $\sigma = \sigma' := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $\sigma' := (b_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$, on note $\sigma \sqcup \sigma'$ la subdivision dont les éléments sont $\{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m\}$. Montrer que

$$\sigma \sqcup \sigma' = \sigma' \sqcup \sigma \quad \sigma \sqcup \sigma' \prec \sigma \quad \text{et} \quad \sigma \sqcup \sigma' \prec \sigma'$$

Exemple: le plus souvent on utilisera les subdivisions de $[a, b]$ suivantes.

$$\sigma := \left(a + k \frac{b-a}{n}\right)_{0 \leq k \leq n}, \quad \sigma' := \left(a + k \frac{b-a}{2n}\right)_{0 \leq k \leq 2n} \quad \text{et} \quad \sigma'' := \left(a + k \frac{b-a}{2^n}\right)_{0 \leq k \leq 2^n}$$

Elles vérifient $\sigma'' \prec \sigma' \prec \sigma$ et ont pour pas respectif

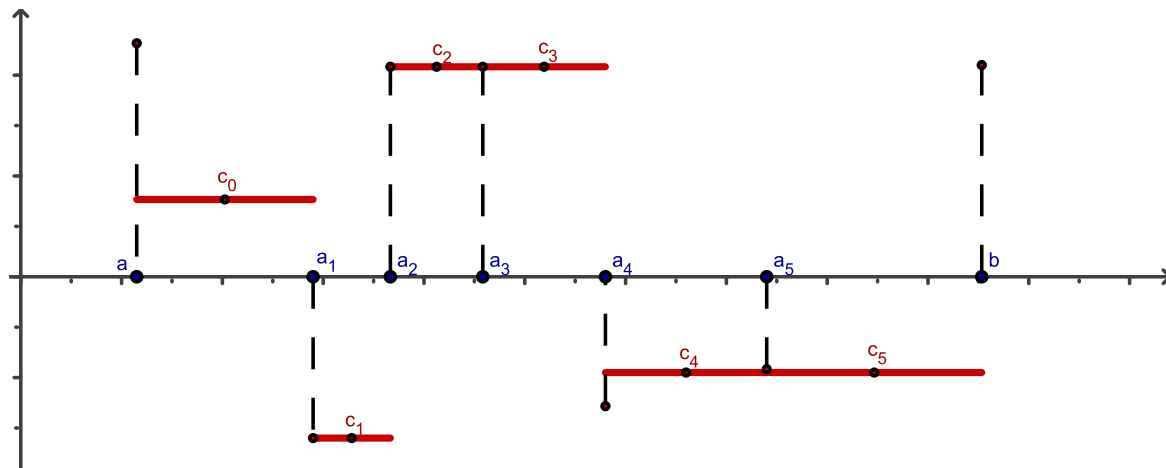
$$\delta = \frac{b-a}{n}, \quad \delta' = \frac{b-a}{2n} \quad \text{et} \quad \delta'' = \frac{b-a}{2^n}$$

Il s'agit là de subdivisions à pas constant.

Définition 16.1.2 (Fonctions en Escalier)

On dit que $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier lorsque l'on peut trouver une subdivision $\sigma := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que φ est constante sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ (avec $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$).

On dit que σ est une subdivision adaptée à φ (toute autre subdivision plus fine l'est aussi) ♠



Exemple: la fonction partie entière est une fonction en escalier sur $[-10, 27]$

Exercice: Toute restriction d'une fonction en escalier est une fonction en escalier

Proposition 16.1.1 L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, noté $\mathcal{Esc}([a, b])$, est un sous-anneau (resp. un sous-espace vectoriel) de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ ♣

Démonstration 1 est en escalier et toute fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs est donc bornée .

- la fonction constante 1 est en escalier.
- Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier ayant pour subdivisions adaptées sont σ et σ' , $\sigma \sqcup \sigma'$ étant plus fine que σ et σ' elle est adaptée simultanément à φ et à ψ . Elles sont donc constantes sur tout intervalle ouvert associé à la subdivision $\sigma \sqcup \sigma'$. D'où il en va de même pour $\varphi - \psi$ et $\varphi \times \psi$

$$\varphi - \psi \in \mathcal{Esc}([a, b]) \quad \text{et} \quad \varphi \times \psi \in \mathcal{Esc}([a, b])$$

- Avec les mêmes notations, on a de même pour λ, μ dans $\mathbb{R}$

$$\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{Esc}([a, b])$$

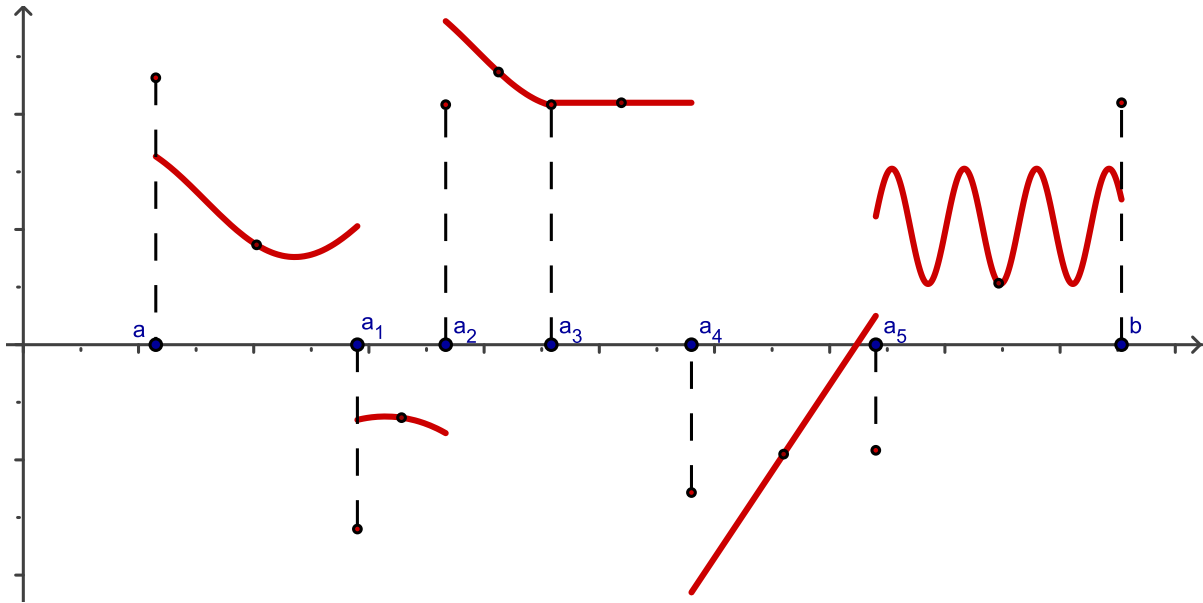
•

16.1.2 Fonctions continues par morceaux

Définition 16.1.3 On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, lorsque l'on peut trouver une subdivision $\sigma := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \begin{cases} f \in \mathcal{C}(]a_i, a_{i+1}[) \\ \lim_{a_i^+} f \text{ existe} \\ \lim_{a_{i+1}^-} f \text{ existe} \end{cases}$$

On dit que σ est une subdivision adaptée à f (toute autre subdivision plus fine l'est aussi) ♠

**Remarque 16.1.1**

f est donc prolongeable par continuité sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}] \dots$
 mais n'est pas forcément continue sur $[a, b]$

*

Remarque: Toute fonction continue par morceaux n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Exemple: Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux

Exemple: Toute fonction en escalier est continue par morceaux

Exercice: Toute restriction d'une fonction continue par morceaux est une fonction continue par morceaux

Exercice: la valeur absolue d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux.

Proposition 16.1.2 L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, noté $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$, est un sous-anneau (resp. un sous-espace vectoriel) de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ ♣

Démonstration

• Toute fonction continue par morceaux f de subdivision $\sigma := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est prolongeable par continuité sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, son prolongement y est bornée et donc f l'est aussi sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$.

f est donc bornée sur la réunion finie de ces intervalles $[a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ en dehors elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, f est donc bornée sur $[a, b]$

• la fonction constante 1 est continue par morceaux.

• Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier ayant pour subdivisions adaptées sont σ et σ' .

$\sigma \sqcup \sigma'$ est adaptée simultanément à φ et à ψ .

Elles sont donc continues sur tout intervalle ouvert associé à la subdivision $\sigma \sqcup \sigma'$ et convergent (à gauche resp. à droite) aux bornes de ces intervalles.

D'où il en va de même pour $\varphi - \psi$ et $\varphi \times \psi$

$$\varphi - \psi \in \mathcal{C}_{pm}([a, b]) \quad \text{et} \quad \varphi \times \psi \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$$

• Avec les mêmes notations, on a de même pour λ, μ dans $\mathbb{R}$

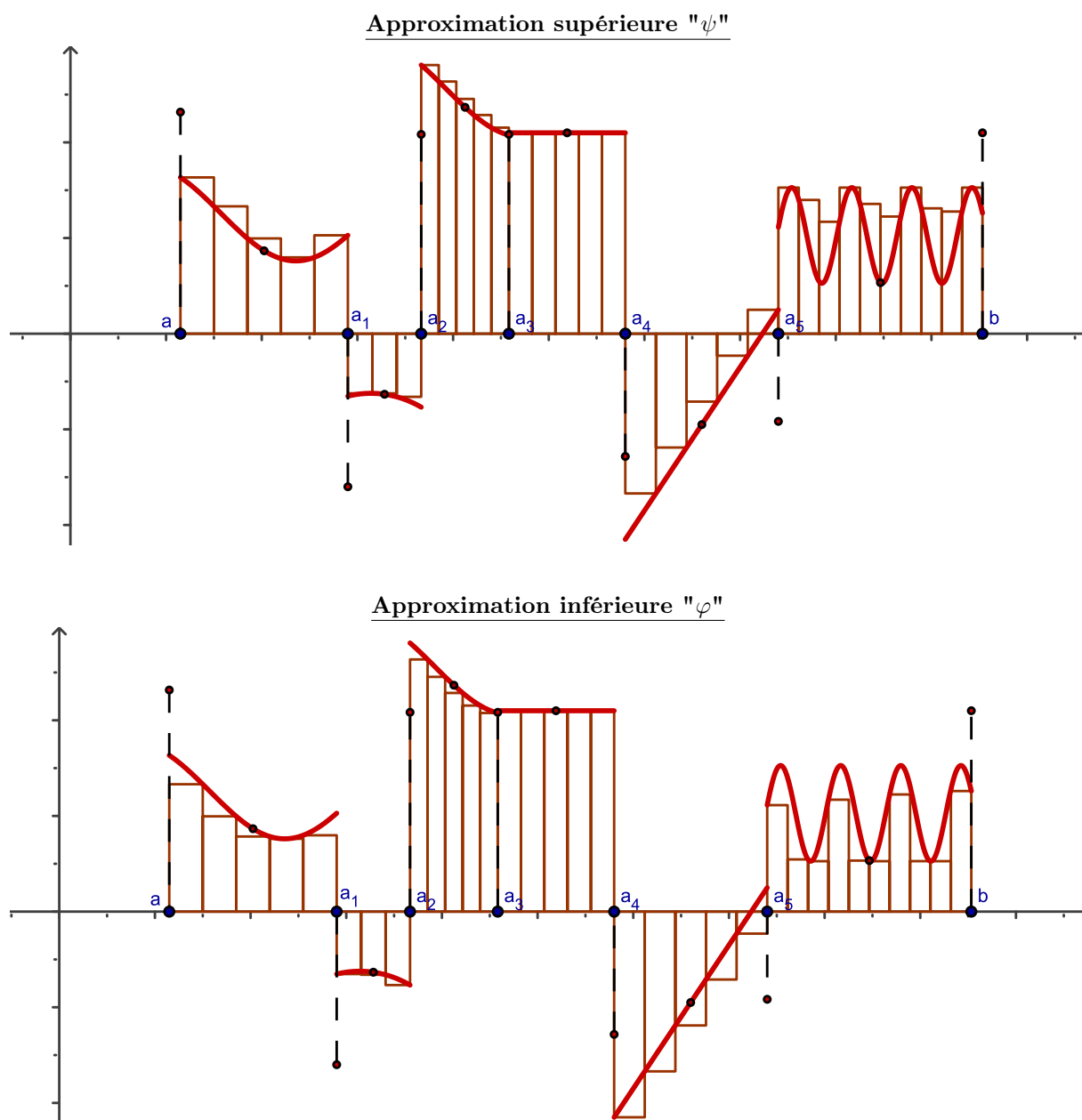
$$\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$$

•

Théorème 16.1.3 (Densité - Admis)

Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$



Remarque: Avec les notations ci-dessus, on dira ici que (φ, ψ) est une ε -approximation de f

16.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

16.2.1 Cas d'une fonction en escalier

Définition 16.2.1 Soit $\varphi \in \mathcal{Esc}([a, b])$ de subdivision adaptée $\sigma := (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On note pour chaque $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, c_i la valeur constante de φ sur $]a_i, a_{i+1}[$, alors la quantité

$$I(\varphi, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) c_i$$

est indépendante des valeurs prises par φ sur les points de la subdivision et ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée σ .

On la note

$$\int_{[a,b]} \varphi$$

♠

Démonstration Il est clair que $I(\varphi, \sigma)$ ne dépend pas des valeurs prises aux points de la subdivision. Montrons que pour deux subdivisions adaptées σ et σ' on a

$$I(\varphi, \sigma) = I(\varphi, \sigma')$$

Comme $\sigma \sqcup \sigma'$ est également adapté il suffit de montrer que

$$I(\varphi, \sigma) = I(\varphi, \sigma \sqcup \sigma') = I(\varphi, \sigma')$$

Et comme σ et σ' jouent des rôles symétriques il suffit de montrer que

$$I(\varphi, \sigma) = I(\varphi, \sigma \sqcup \sigma')$$

Puisque $\sigma \sqcup \sigma'$ est plus fine que σ , on peut construire une suite fine de subdivisions

$$\sigma_p := \sigma \sqcup \sigma' \prec \sigma_{p-1} \prec \dots \prec \sigma_0 := \sigma$$

Où pour chaque $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, σ_{k+1} à un élément de plus que σ_k .

Il suffit alors de montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad I(\varphi, \sigma_k) = I(\varphi, \sigma_{k+1})$$

Soit donc $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ fixé et notons $\sigma_k = (a_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ et b l'élément supplémentaire de σ_{k+1} .

Soit $p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ tel que $a_p < b < a_{p+1}$.

En notant $\varphi|_I$ la valeur constante de φ sur I .

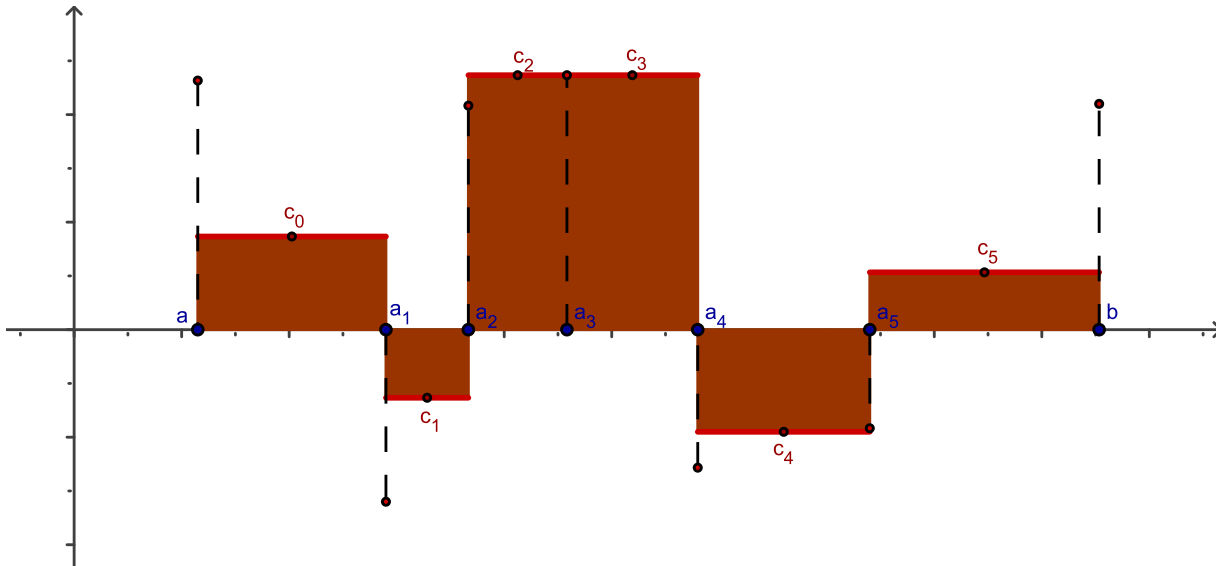
$$\begin{aligned} I(\varphi, \sigma_k) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \varphi|_{a_i, a_{i+1}[} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) \varphi|_{a_i, a_{i+1}[} + \underbrace{(a_{p+1} - a_p) \varphi|_{a_p, a_{p+1}[}}_{(b-a_p) \varphi|_{a_p, b[} + (a_{p+1}-b) \varphi|_{b, a_{p+1}[} + \sum_{i=p+1}^m (a_{i+1} - a_i) \varphi|_{a_i, a_{i+1}[} \\ &= I(\varphi, \sigma_{k+1}) \end{aligned}$$

•

Remarque 16.2.1 En notant $\mathcal{A}$ la somme algébrique des aires des parallélogrammes construits à partir de du graphe de φ sur $[a, b]$, on a

$$\mathcal{A} = \int_{[a,b]} \varphi$$

*



Proposition 16.2.1 Soient φ et ψ dans $\mathcal{E}sc([a, b])$ et λ, μ deux réels, on a

$$\varphi \geq 0 \implies \int_{[a, b]} \varphi \geq 0$$

$$\int_{[a, b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \left(\int_{[a, b]} \varphi \right) + \mu \left(\int_{[a, b]} \psi \right)$$

On dit que l'intégration sur $[a, b]$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{E}sc([a, b])$ ♣

Démonstration En reprenant les notations précédentes :

$$\varphi \geq 0 \implies \int_{[a, b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{\geq 0} \underbrace{(\varphi]_{a_i, a_{i+1}[}}_{\geq 0} \geq 0$$

Par ailleurs pour $\sigma = (b_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ adaptée à φ et ψ simultanément (ce qui est toujours possible)

$$\int_{[a, b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) (\lambda\varphi + \mu\psi)_{]b_i, b_{i+1}[} = \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) (\lambda \cdot \varphi]_{]b_i, b_{i+1}[} + \mu \cdot \psi]_{]b_i, b_{i+1}[})$$

Et donc

$$\int_{[a, b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) \cdot \varphi]_{]b_i, b_{i+1}[} + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) \cdot \psi]_{]b_i, b_{i+1}[}$$

Corollaire 16.2.2 (Croissance)

Soient φ et ψ dans $\mathcal{E}sc([a, b])$.

$$\varphi \leq \psi \implies \int_{[a, b]} \varphi \leq \int_{[a, b]} \psi$$

En particulier pour tout réel m et M

$$m \leq \varphi \leq M \implies m(b-a) \leq \int_{[a, b]} \varphi \leq M(b-a)$$

Preuve D'après ce qui précède ♣

$$\varphi \leq \psi \implies \psi - \varphi \geq 0 \implies \int_{[a, b]} \psi - \int_{[a, b]} \varphi = \int_{[a, b]} \psi - \varphi \geq 0 \implies \int_{[a, b]} \varphi \leq \int_{[a, b]} \psi$$

La dernière implication découle alors de

$$\int_{[a, b]} m = m(b-a) \quad \text{et} \quad \int_{[a, b]} M = M(b-a)$$

Proposition 16.2.3 (Relation de Chasles) Soit $\varphi \in \mathcal{E}sc([a, b])$ et $c \in]a, b[$, alors

$$\int_{[a, b]} \varphi = \int_{[a, c]} \varphi + \int_{[c, b]} \varphi$$

Démonstration Soit $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ adapté à φ , en notant $\sigma' = (b_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ la subdivision construite à partir des points $\{a_1, \dots, a_n, c\}$. Puisque σ' (plus fine que σ) est adaptée à φ . ♣

$$\int_{[a, b]} \varphi = \sum_{i \leq p-1} (b_{i+1} - b_i) \cdot \varphi]_{]b_i, b_{i+1}[} + \sum_{i \geq p} (b_{i+1} - b_i) \cdot \varphi]_{]b_i, b_{i+1}[} = \int_{[a, c]} \varphi + \int_{[c, b]} \varphi$$

Où p est tel que $c = b_p$ •

16.2.2 Cas d'une fonction continue par morceaux

Proposition 16.2.4 Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$, les ensembles

$$\mathcal{I}_-(f) := \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{Esc}([a, b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_+(f) := \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{Esc}([a, b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}$$

sont non vides et majorés, resp. minorés

♣

Démonstration Puisque f est bornée on a

$$m \leq f \leq M$$

Et donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{Esc}([a, b]), \quad \varphi \leq f \implies \varphi \leq M \implies \int_{[a,b]} \varphi \leq M(b-a)$$

$$\text{resp.} \quad \forall \psi \in \mathcal{Esc}([a, b]), \quad f \leq \psi \implies m \leq \psi \implies \int_{[a,b]} \psi \geq m(b-a)$$

D'où (puisque les fonctions constantes m et M sont en escalier)

$$\{m(b-a)\} \subset \mathcal{I}_-(f) \subset]-\infty, M(b-a)] \quad \text{et} \quad \{M(b-a)\} \subset \mathcal{I}_+(f) \subset [m(b-a), +\infty[$$

•

Définition 16.2.2 Pour f continue par morceaux sur $[a, b]$, la borne supérieure de $\mathcal{I}_-(f)$ et la borne inférieure de $\mathcal{I}_+(f)$ coïncident, on note leurs valeurs communes

$$\int_{[a,b]} f := \sup \mathcal{I}_-(f) = \inf \mathcal{I}_+(f)$$

♠

Démonstration Notons I_- et I_+ ces deux bornes.
par croissance de l'intégration.

$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{Esc}([a, b])^2, \quad \varphi \leq f \leq \psi \implies \varphi \leq \psi \implies \int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$$

Et donc

$$\forall (u, v) \in \mathcal{I}_-(f) \times \mathcal{I}_+(f), \quad u \leq v$$

D'où

$$I_- \leq I_+$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de densité, on peut trouver φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

On par linéarité et croissance de l'intégrale on en déduit

$$\underbrace{\int_{[a,b]} \psi}_{\in \mathcal{I}_+(f)} - \underbrace{\int_{[a,b]} \varphi}_{\in \mathcal{I}_-(f)} = \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leq \int_{[a,b]} \varepsilon = \varepsilon(b-a)$$

Or puisque I_+ et I_- minorent et majorent respectivement $\mathcal{I}_+(f)$ et $\mathcal{I}_-(f)$

$$I_+ \leq \int_{[a,b]} \psi \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \varphi \leq I_-$$

D'où

$$I_+ - I_- \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon(b-a)$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq I_+ - I_- \leq \varepsilon(b-a)$$

Et donc $I_+ = I_-$

•

Remarque: Si f est une fonction en escalier son intégrale au sens des fonctions en escalier coïncide avec son intégrale au sens des fonctions continues par morceaux.

Lemme 16.2.5 Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ et $\varepsilon > 0$, Si (φ, ψ) est une ε -approximation de f , alors

$$\int_I \varphi \leq \int_I f \leq \int_I \psi$$

Et plus précisément

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi \leq |I|\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_I \psi - \int_I f \leq |I|\varepsilon$$

♣

Preuve Puisque

$$\int_I \varphi \in \mathcal{I}_-(f) \quad \text{et} \quad \int_I \psi \in \mathcal{I}_+(f)$$

Par définition des bornes sup et inf, on obtient le premier encadrement.

Le deuxième provient de la croissance de l'intégrale des fonctions en escalier :

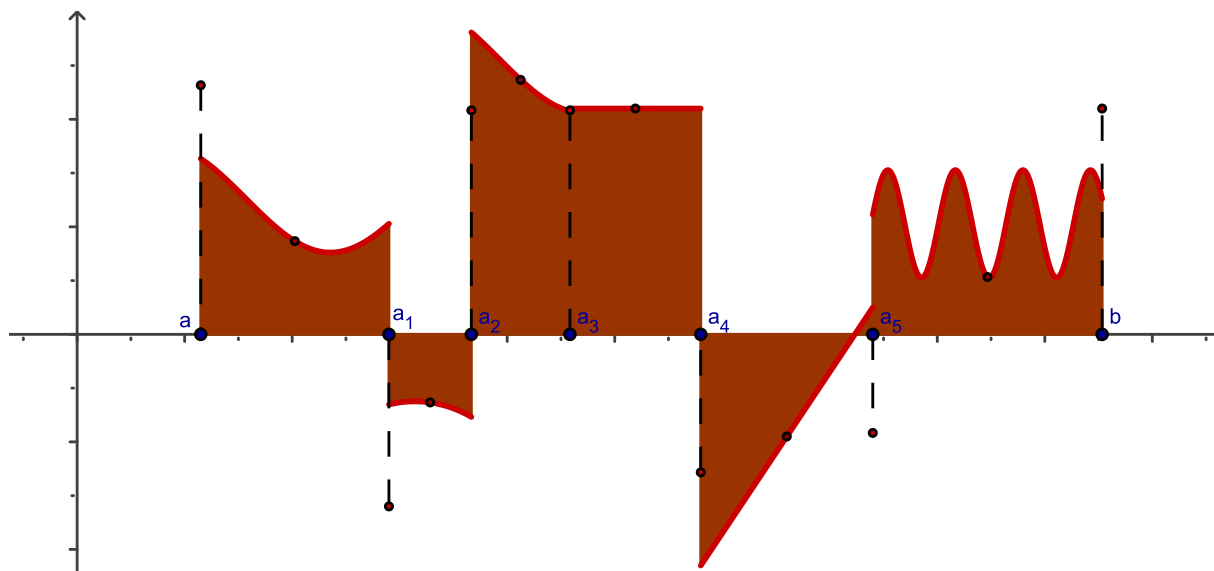
$$\psi \leq \varphi + \varepsilon \quad \text{d'où} \quad \int_I \psi \leq \int_I (\varphi + \varepsilon) = \int_I \varphi + |I|\varepsilon$$

•

Remarque 16.2.2 En notant $\mathcal{A}$ l'aire algébrique du secteur compris entre le graphe de f et l'axe des abscisses entre $[a, b]$, on a

$$\mathcal{A} = \int_{[a,b]} f$$

*



Corollaire 16.2.6 Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([-\omega, \omega])$ avec $\omega > 0$.

Si f est paire Alors $\int_{[-\omega, \omega]} f = 2 \int_{[0, \omega]} f$

Si f est impaire Alors $\int_{[-\omega, \omega]} f = 0$

♣

16.3 Propriétés de l'intégrale

16.3.1 Croissances et Linéarité

Dans toute cette section $I := [\alpha, \beta]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$

Proposition 16.3.1 Soient f et g dans $\mathcal{C}_{pm}(I)$ et λ, μ deux réels, on a

$$f \geq 0 \implies \int_I f \geq 0$$

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\int_I f \right) + \mu \left(\int_I g \right)$$

On dit que l'intégration sur $[a, b]$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ ♣

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ et (φ, ψ) une ε -approximation de f .

Puisque $\psi \geq f \geq 0$, par positivité de l'intégrale des fonctions en escalier.

$$\int_I \psi \geq 0$$

D'où

$$\int_I f \geq \int_I \psi - |I|\varepsilon \geq -|I|\varepsilon$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_I f \geq -|I|\varepsilon$$

On conclut sur la positivité par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Montrons la linéarité.

soit (φ_1, ψ_1) et (φ_2, ψ_2) des ε -approximations de f et g respectivement (avec $\varepsilon > 0$ quelconque).

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq \varphi_1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi_2 \leq g \leq \psi_2 \leq \varphi_2 + \varepsilon$$

D'où

$$|f - \varphi_1| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |g - \varphi_2| \leq \varepsilon$$

Et donc par inégalité triangulaire

$$|(\lambda f + \mu g) - (\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2)| = |\lambda(f - \varphi_1) + \mu(g - \varphi_2)| \leq |\lambda| \cdot |f - \varphi_1| + |\mu| \cdot |g - \varphi_2| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

D'où

$$\underbrace{(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) - (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon}_{\in \mathcal{Esc}(I)} \leq \underbrace{\lambda f + \mu g}_{\in \mathcal{C}_{pm}(I)} \leq \underbrace{(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) + (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon}_{\in \mathcal{Esc}(I)}$$

D'où par définition des bornes sup et inf de $\mathcal{I}_-(f)$ et $\mathcal{I}_+(f)$

$$\int_I (\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) - (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon \leq \int_I \lambda f + \mu g \leq \int_I (\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) + (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

soit par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier

$$(*) \quad \lambda \int_I \varphi_1 + \mu \int_I \varphi_2 - (|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon \leq \int_I \lambda f + \mu g \leq \lambda \int_I \varphi_1 + \mu \int_I \varphi_2 + (|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon$$

Par ailleurs

$$0 \leq \int_I f - \int_I \varphi_1 \leq |I|\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_I g - \int_I \varphi_2 \leq |I|\varepsilon$$

D'où

$$\left| \int_I f - \int_I \varphi_1 \right| \leq |I|\varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \int_I g - \int_I \varphi_2 \right| \leq |I|\varepsilon$$

Et donc par inégalité triangulaire

$$\left| (\lambda \int_I f + \mu \int_I g) - (\lambda \int_I \varphi_1 + \mu \int_I \varphi_2) \right| \leq |\lambda| \cdot \left| \int_I f - \int_I \varphi_1 \right| + |\mu| \cdot \left| \int_I g - \int_I \varphi_2 \right| \leq (|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon$$

D'où

$$(**) \quad (\lambda \int_I f + \mu \int_I g) - (|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon \leq \lambda \int_I \varphi_1 + \mu \int_I \varphi_2 \leq (\lambda \int_I f + \mu \int_I g) + (|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon$$

Et donc en combinant (*) et (**)

$$\lambda \int_I f + \mu \int_I g - 2(|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon \leq \int_I \lambda f + \mu g \leq \lambda \int_I f + \mu \int_I g + 2(|\lambda| + |\mu|)|I|\varepsilon$$

Ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda \int_I f + \mu \int_I g \leq \int_I \lambda f + \mu g \leq \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

CQFD •

Corollaire 16.3.2 (Croissance et Inégalité de la Moyenne)

Soient f et g dans $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$.

On a la **croissance** de l'intégrale :

$$f \leq g \implies \int_I f \leq \int_I g$$

Puisque f est alors bornée, on a l'**inégalité de la moyenne**

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_I |g|$$

En particulier on obtient une "généralisation aux sommes continues de l'**inégalité triangulaire**"

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

♣

Démonstration La croissance est une conséquence immédiate de la positivité et de la linéarité

$$f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies \int_I g - \int_I f = \int_I (g - f) \geq 0 \implies \int_I f \leq \int_I g$$

L'inégalité de la moyenne, en découle puisque

$$|fg| \leq \left(\sup_I |f| \right) \cdot |g| \quad \text{d'où} \quad - \left(\sup_I |f| \right) \cdot |g| \leq fg \leq \left(\sup_I |f| \right) \cdot |g|$$

D'où par croissance et linéarité de l'intégrale

$$- \left(\sup_I |f| \right) \cdot \int_I |g| \leq \int_I fg \leq \left(\sup_I |f| \right) \cdot \int_I |g|$$

La dernière inégalité en découle puisque pour $f = 1$, on obtient

$$\left| \int_I 1g \right| \leq \underbrace{\sup_I |1|}_{=1} \cdot \int_I |g|$$

•

Remarque 16.3.1 Le nom d'inégalité de la moyenne provient du fait que

$$\frac{1}{\int_I f} \int_I fg$$

peut être interprétée comme la moyenne de f pondérée par g sur I (comme un barycentre). La proposition affirme alors que cette moyenne est majorée en valeur absolue comme la fonction. *

Remarque 16.3.2 En particulier pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$

$$m \leq f \leq M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M$$

$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$ est ce qu'on appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ *

Proposition 16.3.3 (Relation de Chasles) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ et $a < b < c$ dans I , alors

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$$

♣

Démonstration Soit (φ, ψ) une ε -approximation de f sur $[a, b]$, elle constitue aussi des ε -approximations de f sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{[a,c]} \varphi &\leq \int_{[a,c]} f \leq \int_{[a,c]} \psi \\ \int_{[c,b]} \varphi &\leq \int_{[c,b]} f \leq \int_{[c,b]} \psi \end{aligned}$$

D'où par addition

$$\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leq \int_{[a,c]} \psi + \int_{[c,b]} \psi$$

Et donc grâce à la relation de Chasles relative aux fonctions en escalier

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leq \int_{[a,b]} \psi$$

Or par ε approximation de f sur $[a, b]$

$$\int_{[a,b]} f - (b-a)\varepsilon \leq \int_{[a,b]} \varphi \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \psi \leq \int_{[a,b]} f + (b-a)\varepsilon$$

Et donc

$$\int_{[a,b]} f - (b-a)\varepsilon \leq \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leq \int_{[a,b]} f + (b-a)\varepsilon$$

Ceci étant réalisé quel que soit $\varepsilon > 0$, on conclut grâce au passage à la limite

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

•

Remarque 16.3.3 En notant pour $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ et a, b dans I

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{Si } a < b \\ 0 & \text{Si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{Si } a > b \end{cases}$$

la relation de Chasles s'écrit

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

*

Remarque 16.3.4 Pour a et b quelconques, l'application $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ est encore linéaire mais n'est plus croissante, cependant :

$$|f| \leq M \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b-a|$$

*

Corollaire 16.3.4 (Croissance relativement au domaine d'intégration)

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ on a

$$(f \geq 0 \quad \text{et} \quad [a, b] \subset I) \implies \int_{[a,b]} f \leq \int_I f$$

♣

Démonstration Si $f \geq 0$ et $[a, b] \subset I$, alors

$$\int_I f = \underbrace{\int_a^a f(x) dx}_{\geq 0} + \int_a^b f(x) dx + \underbrace{\int_b^\beta f(x) dx}_{\geq 0} \geq \int_a^b f(x) dx$$

•

16.3.2 Structure euclidienne de $\mathcal{C}(I)$

Proposition 16.3.5 (Séparation)

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \left(f \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_I f = 0 \right) \implies f = 0$$

♣

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ telle que

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_I f = 0$$

Supposons par l'absurde $f \neq 0$, alors pour un certain $x_0 \in I$ $f(x_0) > 0$.

Et donc par continuité de f en x_0 , on peut trouver J segment contenant x_0 tel que

$$J \subset I \quad |J| > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in J, \quad f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$$

D'où par croissance relativement au domaine d'intégration et croissance de l'intégration

$$\int_I f \geq \int_J f \geq \int_J \frac{f(x_0)}{2} = |J| \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

D'où la contradiction

•

Remarque: Cette proposition est en général fausse dans le cas des fonctions continues par morceaux.

Exemple: $\int_0^1 E(x) dx = 0$ et pourtant $E(0) \neq 0$

Remarque: De même cette proposition est en général fausse dans le cas des fonctions non positives.

Exemple: $\int_{-1}^1 x dx = 0$

Lemme 16.3.6 (Invariance par translation)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$ et $h \in \mathbb{R}$

$$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx = \int_a^b f(x) dx$$

♣

Démonstration Soit (φ, ψ) une ε -approximation de f (avec $\varepsilon > 0$ quelconque)

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$

On en déduit

$$\forall x \in [a-h, b-h], \quad \varphi(x+h) \leq f(x+h) \leq \psi(x+h) \quad \text{et} \quad \psi(x+h) - \varphi(x+h) \leq \varepsilon$$

Et comme $\varphi(\cdot + h)$ et $\psi(\cdot + h)$ sont en escalier, on en déduit :

$(\varphi(\cdot + h), \psi(\cdot + h))$ est une ε -approximation de $f(\cdot + h)$ sur $[a-h, b-h]$.

D'où

$$\int_{a-h}^{b-h} \varphi(x+h) dx \leq \int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx \leq \int_{a-h}^{b-h} \psi(x+h) dx + (b-a)\varepsilon$$

Or s'agissant d'une fonction en escalier (exercice)

$$\int_{a-h}^{b-h} \varphi(x+h) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Par ailleurs

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx + (b-a)\varepsilon$$

Et donc en combinant ces trois derniers encadrements

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)\varepsilon \leq \int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx \leq \int_a^b f(x) dx + (b-a)\varepsilon$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_{a-h}^{b-h} f(x+h) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

•

Corollaire 16.3.7 Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R})$ T -périodique alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

♣

Démonstration Posons $a = mT + r$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, T[$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_r^{r+T} \underbrace{f(x+mT)}_{=f(x)} dx = \int_0^T f(x) dx + \int_T^{r+T} f(x) dx - \int_0^r f(x) dx$$

Or

$$\int_T^{r+T} f(x) dx = \int_0^r f(x+T) dx = \int_0^r f(x) dx$$

•

Remarque 16.3.5 lorsque f est T -périodique et I est un intervalle de longueur T , la quantité

$$\frac{1}{T} \int_I f$$

est ce qu'on appelle la valeur moyenne de f , elle ne dépend ni du choix de I ni du choix de T

*

Exemple: les moyennes de cosinus et sinus sont nulles.

En effet sinus étant impaire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

On en déduit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \cos(x - \pi/2) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin x dx = 0$$

Exercice: Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

Solution : Notons s et c les moyennes de $\sin^2$ et $\cos^2$.
Par linéarité

$$s + c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} dx = 1$$

Par ailleurs, par translation et par périodicité

$$s = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin^2(x - \pi/2) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = c$$

Proposition 16.3.8 (Produit Scalaire) *l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie sur $\mathcal{C}(I)^2$ à valeurs réelles et définie par*

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}(I)^2, \quad \langle f | g \rangle = \int_I fg$$

*est une **forme bilinéaire** :*

$$(\star) \quad \forall (f, g, h) \in \mathcal{C}(I)^3, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \langle f | \lambda g + \mu h \rangle &= \lambda \langle f | g \rangle + \mu \langle f | h \rangle \\ \langle \lambda g + \mu h | f \rangle &= \lambda \langle g | f \rangle + \mu \langle h | f \rangle \end{cases}$$

symétrique

$$(\star\star) \quad \forall (f, g) \in \mathcal{C}(I)^2, \quad \langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$$

définie positive

$$(\star\star\star) \quad \forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \langle f | f \rangle > 0 \iff f \neq 0$$

On résume ces propriétés en disant que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ ♣

Preuve La caractéristique symétrique est immédiat.

Pour montrer la bilinéarité il suffit de prouver la linéarité à droite :

Pour f, g, h quelconques dans $\mathcal{C}(I)$ et λ, μ deux réels quelconques.

$$\langle f | \lambda g + \mu h \rangle = \int_I f \cdot (\lambda g + \mu h) = \int_I \lambda f \cdot g + \mu f \cdot h = \lambda \int_I f \cdot g + \mu \int_I f \cdot h = \lambda \langle f | g \rangle + \mu \langle f | h \rangle$$

Enfin, Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ quelconque.

Le caractère défini positif provient d'une part de la croissance de l'intégrale

$$f^2 \geq 0 \quad \text{d'où} \quad \langle f, f \rangle = \int_I f^2 \geq 0$$

et d'autre part du théorème de séparation puisque

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies \int_I \underbrace{f^2}_{\geq 0} = 0 \implies f^2 = 0 \implies f = 0$$

Ainsi puisque $\langle 0, 0 \rangle = 0$ on a $f = 0 \iff \langle f, f \rangle = 0$, et donc par contraposition

$$f \neq 0 \iff \underbrace{\langle f, f \rangle}_{\geq 0} \neq 0 \iff \langle f, f \rangle > 0$$

•

Remarque 16.3.6 *le caractère défini positif nous permet d'associer à ce produit scalaire une application $\| \cdot \|_2$ définie sur $\mathcal{C}(I)$ par*

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

*

Théorème 16.3.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f, g deux fonctions dans $\mathcal{C}(I)$, on a

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I f^2} \cdot \sqrt{\int_I g^2}$$

Où de façon équivalente

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

le cas d'égalité n'arrivant que lorsque f et g sont proportionnels (on dit aussi qu'ils sont liés), i.e.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}; \quad f = \lambda g \quad \text{ou} \quad g = \lambda f$$

♣

Démonstration Soient f, g dans $\mathcal{C}(I)$.

Dans le cas $g = 0$ l'inégalité devient une égalité (et la fonction nulle est liée à f par $0 = 0 \cdot f$).

Supposons alors $g \neq 0$, c'est à dire $\|g\|_2 \neq 0$.

On pose $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$P : \lambda \mapsto \langle f + \lambda g \mid f + \lambda g \rangle$$

elle est positive, mais aussi polynômiale de degré 2 car par bilinéarité et symétrie

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) = \|g\|_2^2 \lambda^2 + 2\langle f, g \rangle \lambda + \|f\|_2^2$$

On en déduit que son discriminant réduit Δ' ne peut être strictement positif (car alors P changerait de signe), d'où

$$\Delta' \leq 0 \quad \text{et donc} \quad \langle f, g \rangle^2 - \|g\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 \leq 0$$

D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le cas d'égalité correspond à $\Delta' = 0$ et donc l'égalité n'a lieu que si P admet une unique racine, ce qui équivaut à dire qu'elle admet au moins une racine (car le cas de 2 racines est exclu, d'après ce qui précède).

D'où on a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Ce qui équivaut à

$$\langle f + \lambda g \mid f + \lambda g \rangle = 0$$

Et donc par le caractère défini ceci équivaut à

$$f + \lambda g = 0$$

•

Exercice: Montrer que l'application $\|\cdot\|_2$ définie sur $\mathcal{C}(I)$

- est **positive** : $\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|f\|_2 \geq 0$
- est **définie** : $\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|f\|_2 = 0 \iff f = 0$
- est **homogène** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|\lambda \cdot f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$
- vérifie l'**inégalité triangulaire** : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}(I)^2, \quad \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

On résume ces propriétés en disant que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$

Définition 16.3.1 (Somme de Riemann)

Pour f défini sur $[a, b]$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$R_n(f)$ est ce qu'on appelle la somme de Riemann de f d'ordre n sur $[a, b]$

♠

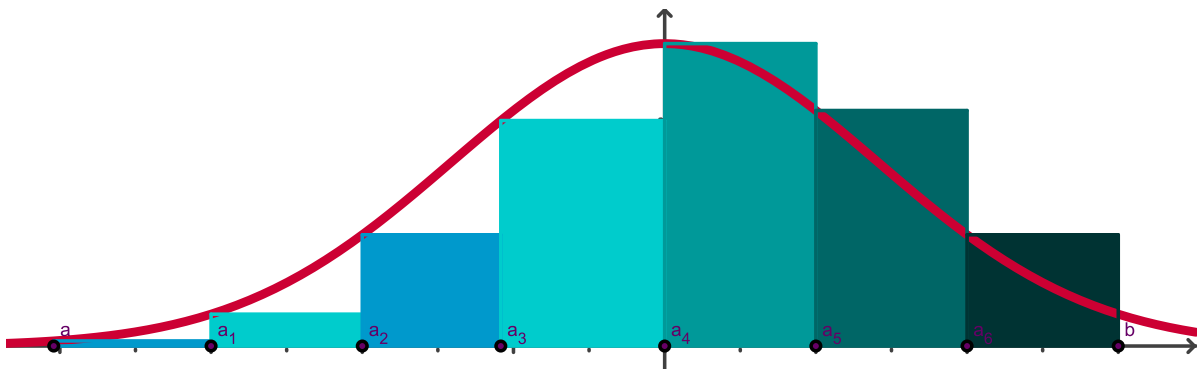
Remarque 16.3.7 Si f est définie sur $[a, b]$ et si on pose $\sigma := (a + k \frac{b-a}{n})_{k \in [0, n]}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas constant, alors

$$R_n(f) = I(\varphi, \sigma)$$

où φ est une fonction en escalier de subdivision adaptée σ avec

$$\varphi]_{a_i, a_{i+1}[} := f(a_i)$$

*



Remarque: D'autres sommes sont possibles ne remplaçant $f(a_i)$ par $f(a_{i+1})$, ou encore la valeur moyenne $\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}$ ou encore toute autre valeur de f sur $[a_i, a_{i+1}]$

Proposition 16.3.10 Si f est lipschitzienne sur $[a, b]$ alors

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

♣

Démonstration Soit f M -lipschitzienne et posons $a_k := a + k \frac{b-a}{n}$ pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| &= \left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(a_k)) dx \right| \end{aligned}$$

D'où par inégalité triangulaire (sur la somme discrète et continue)

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(a_k)) dx \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)| dx$$

On en déduit puisque f est M -lipschitzienne et par croissance de l'intégrale

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M \underbrace{|x - a_k|}_{\leq a_{k+1} - a_k} dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M (a_{k+1} - a_k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{n}$$

On conclut par le théorème des gendarmes

•

16.4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans cette section I désigne encore un segment de $\mathbb{R}$

Définition 16.4.1 Une fonction à valeurs complexes f est dite continue par morceaux, et on note $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ lorsque

$$\operatorname{Re}(f) \in \mathcal{C}_{pm}(I) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{C}_{pm}(I)$$

$\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et un anneau (stable par passage au conjugué complexe). On étend alors l'intégration aux fonctions complexes en posant

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f)$$

♠

Remarque: Par définition

$$\operatorname{Re} \left(\int_I f \right) = \int_I \operatorname{Re}(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int_I f \right) = \int_I \operatorname{Im}(f)$$

On en déduit immédiatement

$$\overline{\int_I f} = \int_I \bar{f}$$

Proposition 16.4.1 (Linéarité)

l'intégration est une forme $\mathbb{C}$ -linéaire sur $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ (à valeurs complexes)

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\int_I f \right) + \mu \left(\int_I g \right)$$

♣

Démonstration Soient f et g continues par morceaux.

$$\int_I f + g = \int_I \operatorname{Re}(f + g) + i \int_I \operatorname{Im}(f + g) = \int_I \operatorname{Re}(f) + \operatorname{Re}(g) + i \int_I \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$$

D'où par linéarité de l'intégration réelle.

$$\int_I f + g = \int_I \operatorname{Re}(f) + \int_I \operatorname{Re}(g) + i \int_I \operatorname{Im}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(g) = \int_I f + \int_I g$$

D'où l'additivité. Montrons l'homogénéité, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose (avec r, s réels)

$$\lambda = r + is \quad \text{et} \quad \gamma := \operatorname{Re}(f) \quad \delta := \operatorname{Im}(f)$$

$$\int_I \lambda f = \int_I (r\gamma - s\delta) + i \int_I (r\delta + s\gamma) = \int_I r\gamma - s\delta + i \int_I r\delta + s\gamma$$

Et donc par linéarité de l'intégrale réelle

$$\int_I \lambda f = r \int_I \gamma - s \int_I \delta + ir \int_I \delta + is \int_I \gamma = (r + is) \cdot \left(\int_I \gamma + i \int_I \delta \right) = \lambda \int_I f$$

•

Proposition 16.4.2 (Relation de Chasles) *Avec les mêmes conventions de notation que dans le cas réel, on a*

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

♣

Exercice: Donner une preuve

Proposition 16.4.3 (Inégalité de la Moyenne - Admis)

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})^2, \quad \left| \int_I fg \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_I |g|$$

En particulier

$$\forall f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}), \quad \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

♣