Table des matières

Chapitre 17

Intégration et Dérivation

Dans tout ce chapitre on considère des fonctions définies sur un intervalle I (non réduit à un point) à valeurs réelles ou complexes

17.1 Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition 17.1.1 *Soit f continue sur I, on dit que F est* **une** *primitive de f sur I lorsque*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x)$$

♠

Proposition 17.1.1 *Deux primitives d'une même fonction (sur un intervalle) différent d'une constante.* ♣

Démonstration Soient F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f sur I.
Alors $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$ sur I (intervalle) et donc $F_1 - F_2$ est constante sur I •

Remarque: l'existence des primitives n'est pas garanti pour des fonctions non continues, y compris lorsque f est continue par morceaux

Exemple: la fonction partie entière ne peut admettre de primitive sur $[-1, 12]$.
En effet dans le cas contraire une primitive F ne vérifierait plus le TVI car F' n'atteindrait jamais la valeur $\sqrt{2} \in [F'(1), F'(2)]$, ce qui est contraire au théorème de Darboux

Théorème 17.1.2 (Théorème Fondamental de l'analyse)
Etant données une fonction f continue sur I et un point $a \in I$

- *la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a*
- *Pour toute primitive G de $f$sur I :*

$$\forall x \in I, \qquad \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

♣

Démonstration ⋆ Montrons que F est une primitive de f sur I
Soit $x_0 \in I$, et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$(*) \qquad \forall t \in I, \qquad |t - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$x_0 + h \in I \qquad \text{et} \qquad |h| \leq \alpha$$

Par Chasles et linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0} f(t)\,dt-\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt\right)-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right|
\end{aligned}$$

Or puisque pour t entre x_0 et x_0+h, on a $t\in I$ et $|t-x_0|\le\alpha$ on en déduit $|f(t)-f(x_0)|\le\varepsilon$
Et donc

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right|\le\varepsilon|h|$$

D'où

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall h\in\mathbb{R}^*,\quad (x_0+h\in I\quad\text{et}\quad |h|\le\alpha)\Longrightarrow\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|\le\varepsilon$$

Et donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=)f(x_0)$ pour tout $x_0\in I$... CQFD
⋆ Montrons que c'est la seule qui s'annule en a
En effet F s'annule en a, et toute autre primitive G diffère d'une constante λ par rapport à F, on a

$$G=F+\lambda\quad\text{d'où}\quad G(a)=F(a)+\lambda=\lambda$$

Et donc $G=F+G(a)$. En particulier si $G(a)=0$ alors $F=G$
⋆ Montrons la deuxième proposition.
Toute autre primitive G s'écrit $G=F+G(a)$ D'où

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)=G(x)-G(a)$$

•

Remarque: F est de classe C^1

Proposition 17.1.3 *Pour toute fonction f de classe C^1 sur I et $a\in I$,*

$$\forall x\in I,\qquad f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt$$

♣

Démonstration Appliquons le théorème fondamental à f' qui est par hypothèse continue sur I.
Puisque par définition f est une primitive de f', on a bien

$$\forall x\in I,\qquad \int_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a)$$

•

Remarque: Dans MAPLE la commande

$$int(f(t),t)$$

renvoie l'expression en t d'une primitive de la fonction f.
Et la commande

$$int(f(t),t=a..b)$$

renvoi $\int_a^b f(t)dt$

17.2 Calcul de Primitives

Proposition 17.2.1 (Intégration par parties) *Soient f et g de classe C^1 sur I et a, b dans I. On a alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Où $\Big[f(t)g(t)\Big]_{t=a}^{b}$ (noté aussi $\Big[fg\Big]_a^b$ voire $\Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$) désigne la quantité $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ ♣

Démonstration Par produit de fonctions continues, chacune des intégrales est bien définie. et par ailleurs

$$(fg)' = f'g + fg' \in C^0$$

On a alors

$$f(b)g(a) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

•

Exemple: En posant $f(t) = t$ et $g(t) = \ln(t)$, il vient

$$\forall x > 0, \quad \int_1^x \ln(t)\,dt = \int_1^x f'(t)g(t)\,dt = \Big[t\ln(t)\Big]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{t}{t}dt = x\ln(x) - 1 - (x-1) = x\ln x - x$$

Remarque 17.2.1 *Dans la pratique on pose simultanément fonctions et dérivées, pour tout $t \in [a, b]$*

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v(t) = g(t) & v'(t) = g'(t) \end{array}$$

D'où par IPP

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

$*$

Exemple: Montrer que $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{t}dt$ est bornée sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$.
Posons pour $t \geq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{rl} u(t) = -\cos(t) & u'(t) = \sin(t) \\ v(t) = \dfrac{1}{t} & v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{array}$$

Pour $x \geq \frac{\pi}{2}$ quelconque

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{t}dt = \Big[-\frac{\cos t}{t}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{t^2}dt = -\frac{\cos x}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{t^2}dt$$

D'où pour $x \geq \pi/2$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{t}dt\right| \leq \left|\frac{\cos x}{x}\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{t^2}dt\right| \leq \frac{1}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|dt \leq \frac{2}{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{t^2}dt = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{4}{\pi}$$

Proposition 17.2.2 (Changement de variable) *Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ et $\varphi : [a, b] \to I$ de classe C^1. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)dx$$

♣

Démonstration Soit $f \circ \varphi$ par composition cette fonction est continue sur $[a, b]$. Comme φ' l'est aussi, il en va de même pour $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, la deuxième intégrale est donc bien définie. Soit F une primitive de f sur I Puisque

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi' = (F \circ \varphi)'$$

On en déduit

$$\int_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = F\Big(\varphi(b)\Big) - F\Big(\varphi(a)\Big) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

•

Remarque: il n'est pas exigé que φ soit bijective, ni même injective ou surjective

Exemple: Pour tout f continue sur $[a, b]$ on a (avec $\varphi : x \mapsto a + x(b - a)$ C^1 de $[0, 1]$ dans $[a, b]$)

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt = \int_0^1 f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = (b - a)\int_0^1 f(a + x(b - a))\,dx$$

Exercice: Montrer que pour $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x)dx$$

indication : Utiliser $\psi : x \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$

Remarque: Ainsi tout calcul d'intégrale sur $[a, b]$ se ramène au calcul d'une intégrale sur $[0, 1]$ ou sur $[-1, 1]$

Remarque 17.2.2 *Dans la pratique on pose*

$$t = \varphi(x) \qquad \textit{et} \qquad dt = \varphi'(x)dx$$

D'où

$$\int_a^b f\Big(\underbrace{\varphi(x)}_{t}\Big)\underbrace{\varphi'(x)dx}_{dt} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Attention tout ceci est un abus de notation relative à la proposition précédente ∗

Exemple: Par le changement de variable

$$t = \sin x \qquad \text{et} \qquad dt = \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Exercice: Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt$

17.3 Formules de Taylor

Proposition 17.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in C^{n+1}(I)$ (avec $n \in \mathbb{N}$), on a alors pour tout a, b dans I.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

On dit f admet un développement de Taylor à l'ordre n entre a et b avec reste intégral ♣

Démonstration

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\forall f \in C^{n+1}(I), \forall (a, b) \in I^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\text{"}$$

• $\mathcal{P}(0)$ est vérifié car pour tout $f \in C^1(I)$ et a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

• Si pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque $\mathcal{P}(n)$ est vérifié alors pour tout $f \in C^{n+2}(I)$ et a, b dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Or par IPP

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right) f^{(n+1)}(t)\, dt = -\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

D'où

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

et donc, ceci etant vrai quel que soit $f \in C^{n+2}(I)$ et a, b dans I, on a $\mathcal{P}(n+1)$
• Conclusion •

Remarque: à l'ordre 1 la formule de Taylor, n'est rien d'autre que la formule d'intégration par parties (IPP)

Remarque: On a avec les notations ci-dessus et par le changement de variable $\varphi : t \mapsto a + (b-a)t$ de $[0, 1]$ dans $[a, b]$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + t(b-a))\, dt$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t)\, dt$$

Corollaire 17.3.2 *Pour tout $a \in I$ et toute fonction f de classe C^{n+1} sur I ($n \in \mathbb{N}$) on a*

$$f := T_n[f] + R_n[f]$$

Où $T_n[f]$ noté parfois T_n est la partie principale du développement de Taylor de f en a d'ordre n, et $R_n[f]$ noté parfois R_n est le reste de ce développement

$$T_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{et} \qquad R_n : x \mapsto \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + t(x-a))\, dt$$

♣

Remarque: les notations $R_n[f]$ et $T_n[f]$ ne sont pas standard et ne font pas apparaître le point a alors que ces fonctions dépendent de ce point, ce sera donc le contexte qui précisera le choix de a

Remarque: T_n est une fonction polynômiale de degré au plus n

Exemple: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \exp(tx))\, dt$$

Proposition 17.3.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et a, b dans I quelconques, on a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{avec} \quad M_{n+1} := \sup_J |f^{(n+1)}|$$

où J est le segment d'extrémités a et b ♣

Démonstration Soient f, a, b tels que ci-dessus et supposons $a < b$, (le cas $a > b$ étant similaire)

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| = \left|\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(b-a))\,dt\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n+1)}(a+t(b-a))\right|dt$$

Or

$$\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n+1)}(\underbrace{a+t(b-a)}_{\in[a,b]})\right|dt \leq M_{n+1}\int_0^1(1-t)^n\,dt = M_{n+1}\Big[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{M_{n+1}}{n+1}$$

•

Exemple: Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

Exercice: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$$

17.4 Primitives usuelles et Méthodes

voir Fiche 10