

Table des matières

19 Espaces Vectoriels	3
19.1 Espaces-vectoriels et Sous-espaces vectoriels	3
19.2 Translations, sous-espaces affines	8
19.2.1 Translations	8
19.2.2 Sous-espaces affines	8
19.3 Applications Linéaires	10
19.3.1 Définitions et Exemples	10
19.3.2 Structures et Propriétés	12
19.3.3 Equations Linéaires	13
19.4 Bases et Combinaisons Linéaires	14
19.4.1 Familles Génératrices	14
19.4.2 Familles Liées - Familles Libres	17
19.4.3 Base et image d'une base	19
19.5 Projecteurs et Symétries	21
19.5.1 Projecteurs	22
19.5.2 Symétries	24

Chapitre 19

Espaces Vectoriels

19.1 Espaces-vectoriels et Sous-espaces vectoriels

voir Fiche 09 : Structures Algébriques

Définition 19.1.1 ($\mathbb{K}$ -ev)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (le plus généralement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et E un ensemble muni d'une l.c.i $+$ et d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel lorsque

($\mathcal{EV}_1$) $(E, +)$ est un groupe **commutatif**.

($\mathcal{EV}_2$) " $\cdot$ " est distributif à gauche sur $+$:

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

($\mathcal{EV}_3$) " $\cdot$ " est distributif à droite sur $+$:

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

($\mathcal{EV}_4$) Associativité mixte :

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

($\mathcal{EV}_5$) $1_{\mathbb{K}}$ est opérateur neutre relativement à " $\cdot$ ".

$$\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$$

On appelle vecteur tout élément de E et scalaire tout élément de $\mathbb{K}$



Remarque: On montre par une récurrence évidente (avec les notations additives pour le groupe $(E, +)$)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in E, \quad nx = n \cdot x$$

Exemple: $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ et $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$ -ev

Exemple: $(\{\vec{0}\}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev

Exemple: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$ -ev

Exemple: $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -ev, mais $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$ -ev

Exemple: Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev (où $\cdot$ est induite par $\times$)

Exemple: $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev

Exemple: $(\mathcal{F}(I, \mathbb{C}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -ev (mais aussi un $\mathbb{R}$ -ev)

Exemple: $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ (suites à valeurs réelles resp. complexes) sont des $\mathbb{R}$ -ev

Exemple: $(\mathcal{S}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -ev

Exemple: $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev (où $\cdot$ est induite par $\times$)

Exemple: Soit F un $\mathbb{K}$ -ev et X un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ des applications de X dans F forme un $\mathbb{K}$ -ev pour les lois

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

où f, g sont quelconques dans $\mathcal{F}(X, F)$ et λ quelconque dans $\mathbb{K}$

Remarque 19.1.1 Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -ev alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

Ici on note encore $\cdot$ la lce induite par $\cdot$ sur $\mathbb{R}$

*

Définition 19.1.2 (CL)

Soient $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(x_i)_{i \in I}$ deux familles finies de scalaires et vecteurs respectivement.

Le vecteur

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

est ce qu'on appelle une combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ ♠

Exercice: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x)$$

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E$$

Solution : Grace aux distributivités

$$\underbrace{(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})}_{0_{\mathbb{K}}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \underbrace{(0_E + 0_E)}_{0_E} = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

D'où $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

D'où par distributivité

$$\lambda \cdot x + (-\lambda) \cdot x = (\lambda - \lambda) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot 0_E = 0_E$$

D'où par définition des symétriques

$$(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$$

Enfin supposons $\lambda \cdot x = 0_E$, Montrons que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

En effet dans le cas où $\lambda = 0$, il n'y a rien à montrer et dans le cas contraire

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{(\lambda \cdot x)}_{0_E} = 0_E$$

Remarque: On en déduit pour tout λ, μ dans $\mathbb{K}$ et x, y dans E

$$\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \quad \text{et} \quad (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \cdot x = \lambda \cdot y \\ \lambda \neq 0 \end{array} \right\} \implies x = y \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda \cdot x = \mu \cdot x \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \implies \lambda = \mu$$

Proposition 19.1.1

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -ev, alors $E \times F$ muni des lois produit est un $\mathbb{K}$ -ev. ♣

Démonstration

($\mathcal{EV}_1$) $(E, +)$ est un groupe **commutatif**. (cf fiche)

($\mathcal{EV}_2$) "." est distributif à gauche sur $+$:

$$\forall (\lambda, (a, b), (x, y)) \in \mathbb{K} \times (E \times F) \times (E \times F), \quad \lambda \cdot ((a, b) + (x, y)) = \lambda \cdot (a + x, b + y) =$$

$$(\lambda \cdot (a + x), \lambda \cdot (b + y)) = (\lambda \cdot a + \lambda \cdot x, \lambda \cdot b + \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) + (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (x, y)$$

($\mathcal{EV}_3$) "." est distributif à droite sur $+$:

$$\forall (\lambda, \mu, (a, b)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times (E \times F), \quad (\lambda + \mu) \cdot (a, b) = ((\lambda + \mu) \cdot a, (\lambda + \mu) \cdot b) = (\lambda \cdot a + \mu \cdot a, \lambda \cdot b + \mu \cdot b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$$

($\mathcal{EV}_4$) Associativité mixte :

$$\forall (\lambda, \mu, (a, b)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times (E \times F), \quad (\lambda \times \mu) \cdot (a, b) = ((\lambda \times \mu) \cdot a, (\lambda \times \mu) \cdot b) = (\lambda \cdot (\mu \cdot a), \lambda \cdot (\mu \cdot b)) = \lambda \cdot (\mu \cdot (a, b)) = \lambda \cdot (\mu \cdot (a, b))$$

($\mathcal{EV}_5$) $1_{\mathbb{K}}$ est opérateur neutre relativement à "."

$$\forall (a, b) \in E \times F, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot (a, b) = (1_{\mathbb{K}} \cdot a, 1_{\mathbb{K}} \cdot b) = (a, b)$$

Exemple: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est l'espace produit de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ avec lui-même

Exemple: On définit de même $\mathbb{C}^2$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Exemple: On généralise cette définition au $\mathbb{K}$ -ev : E^n où E est un $\mathbb{K}$ -ev

Définition 19.1.3 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ lorsque

- F est un sous-groupe de $(E, +)$
- F est stable pour $\cdot$

Remarque 19.1.2 Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$ est une partie stable pour $\cdot$ et $+$, alors $\cdot$ et $+$ induisent une l.c.i sur B (notons-les encore $\cdot$ et $+$).

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } (E, +, \cdot) \iff (F, +, \cdot) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev}$$

Proposition 19.1.2 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$ **non vide**.

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } (E, +, \cdot) \iff \forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times F \times F, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

Démonstration • l'implication directe est claire puisque pour x, y dans E et λ, μ dans $\mathbb{K}$, on a : $\lambda x \in E$ et $\mu y \in E$ par stabilité pour la loi $\cdot$. Et donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$ car F est stable par addition puisque c'est un groupe

- Réciproquement puisque F est une partie non vide et que pour tout x, y dans F

$$x - y = 1 \cdot x + (-1) \cdot y \in F$$

c'est donc un sous-groupe de E .

De plus pour tout $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot x + 0 \cdot x \in F$$

F est donc stable par $\cdot$

Remarque: On utilise parfois cette propriété en deux temps, Pour $F \subset E$ **non vide**, F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in F \times F, \quad x + y \in F \quad \text{et} \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \quad \lambda \cdot x \in F$$

Exercice: le prouver

Remarque: Soient $A \subset B \subset E$ et B un sous-espace vectoriel de E . On a

$$A \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff A \text{ sous-espace vectoriel de } B$$

Exemple: Toute droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{P}}$ (resp. $\vec{\mathcal{E}}$)

Exemple: Tout plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$

Exemple: l'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Exemple: l'ensemble $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ des suites convergeant vers 0 est un $\mathbb{R}$ -sev de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Exemple: l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) sur $\mathbb{R}$ forment des $\mathbb{R}$ -sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exemple: l'ensemble $C^k(I)$ est un $\mathbb{R}$ -sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Exemple: l'ensembles des fonctions dérivables sur I est un *sev* de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Exemple: $\mathcal{E}sc([a, b])$ et $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ sont des $\mathbb{R}$ -sev de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$

Exemple: $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$

Exemple: l'ensemble des solutions d'une équation linéaire premier ordre homogène résolue sur I est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Exemple: l'ensemble des solutions d'une équation linéaire à coefficients constants du second ordre homogène résolue sur I est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Proposition 19.1.3 Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide (finie ou infinie) de sev de E , alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i$$

est un sev de E ♣

Démonstration puisque $\forall i \in I, 0_E \in F_i$ (car il s'agit de sev). on en déduit $\bigcap_{i \in I} F_i$ est une partie non vide (car contient 0_E) de E

Par ailleurs. Soient x, y dans $\bigcap_{i \in I} F_i$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$ quelconques.
Pour tout $i \in I$, puisque F_i est un sev, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F_i$
et donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ •

Remarque: On ne peut en général rien dire pour la réunion (même finie) de sev

Exemple: $x \mapsto x^3 + 1$ est la CL d'une fonction paire et impaire sur $\mathbb{R}$ mais n'appartient pas à la réunion $\mathcal{F}_{\text{pair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cup \mathcal{F}_{\text{impair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Définition 19.1.4 Soit P une partie de l'ev E , on note $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(P)$ (ou tout simplement $\text{Vect}(P)$) le sous-espace vectoriel engendré par P , il s'agit du plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant P :

$$P \subset \text{Vect}(P) \quad \text{Vect}(P) \text{ sev de } E$$

$$\forall F \in \mathcal{P}(E), \quad (F \text{ sev de } E \text{ et } P \subset F) \implies \text{Vect}(P) \subset F$$

♠

Démonstration Montrons l'existence de ce sous-espace.

Soit $\mathcal{S}_P$ l'ensemble des sev de E contenant P .

$\mathcal{S}_P$ non vide car il contient E .

Posons

$$\mathcal{V} := \bigcap_{F \in \mathcal{S}_P} F$$

c'est un sev d'après la propriété précédente et il contient P (car intersection de parties contenant P) d'où $\mathcal{V} \in \mathcal{S}_P$. Montrons que c'est le plus petit élément.

Soit $F_0 \in \mathcal{S}_P$ par définition

$$\mathcal{V} = \left(\bigcap_{\substack{F \in \mathcal{S}_P \\ F \neq F_0}} F \right) \cap F_0 \subset F_0$$

•

Remarque: $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ $\text{Vect}(E) = E$ et pour tout sev F de E , on a $\text{Vect}(F) = F$

Proposition 19.1.4 Soit P une partie de E , on a

$$\text{Vect}(P) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid \text{I fini } (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (x_i)_{i \in I} \in E^I \right\}$$

En particulier si $P = \{x_1, \dots, x_m\}$

$$\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_m\}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{K}^m \right\}$$

On note

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_m) := \sum_{i=1}^m \mathbb{K} \cdot x_i = \mathbb{K} \cdot x_1 + \dots + \mathbb{K} \cdot x_m$$

♣

Démonstration On note $\mathcal{V}$ un tel ensemble.

Il est stable par addition et par multiplication par un scalaire, c'est donc un sev. Par ailleurs $P \subset \mathcal{V}$ (clair).
Donc $\mathcal{V} \in \mathcal{S}_P$ (voir notations ci-dessus). Montrons que c'est le plus petit élément

Enfin tout sev F de E contenant P vérifie, F est stable par CL, et donc puisque $P \subset F$ toute CL d'éléments de P est dans F , i.e.

$$\mathcal{V} \subset F$$

•

Exemple: Pour $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ non nul, $Vect(\vec{u})$ est la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$

Exemple: Pour $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ non colinéaires, $Vect(\vec{u}, \vec{v})$ est le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$

Exemple: Dans $\mathbb{K}[X]$, on a $Vect_{\mathbb{K}}(1, X, X^2, \dots, X^m) = \mathbb{K}_m[X]$

Exercice: Montrer que pour P, Q deux parties d'un $\mathbb{K}$ -ev E , on a

$$P \subset Q \implies Vect(P) \subset Vect(Q)$$

Définition 19.1.5 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, on dit que les sev A et B sont supplémentaires dans E (ou encore que A est un sev supplémentaire de B ou encore que B est un sev supplémentaire de A) lorsque.
Tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sous la forme

$$x = a + b \quad \text{avec } a \in A \quad \text{et } b \in B$$

i.e.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(a, b) \in A \times B; \quad x = a + b$$

On note

$$E = A \oplus B$$

♠

Exemple: Soient $\vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs de la base canonique de $\vec{\mathcal{P}}$, alors $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ sont supplémentaires

Exemple: Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de la base canonique de $\vec{\mathcal{E}}$, alors $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j} + \mathbb{R}\vec{k}$ sont supplémentaires

Exemple:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_{\text{pair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_{\text{impair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Remarque: Rappelons la notation pour A, B deux sev

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \quad \text{et } b \in B\}$$

Exercice: Montrer que pour A, B deux sev de E on a $A + B = Vect(A + B) = Vect(A \cup B)$

Exercice: Montrer que pour A, B deux sev de E on a

$$E = A + B \iff \forall x \in E, \quad \exists(a, b) \in A \times B, \quad x = a + b$$

Proposition 19.1.5 Soit E un ev et A, B deux sev de E . On a alors

$$E = A \oplus B \iff E = A + B \quad \text{et} \quad A \cap B = \{0\}$$

♣

Démonstration Dans le sens direct, si $E = A \oplus B$, on a $E = A + B$ d'après l'exercice précédent.
Par ailleurs si $x \in A \cap B$, par unicité dans les décompositions

$$x = \underbrace{x}_{\in A} + \underbrace{0}_{\in B} \quad \text{et} \quad x = \underbrace{0}_{\in A} + \underbrace{x}_{\in B}$$

on a $x = 0$.

Pour la réciproque, soit $x \in E$ on sait déjà puisque $E = A + B$, que l'on peut trouver a, b dans A et B respectivement tq

$$x = a + b$$

Montrons l'unicité. Si par l'absurde on peut trouver $(a', b') \in A \times B$ distinct de (a, b) tel que

$$x = a' + b'$$

On en déduit

$$a' + b' - (a + b) = 0 \quad \text{d'où} \quad \underbrace{a' - a}_{\in A} = \underbrace{b - b'}_{\in B}$$

D'où

$$a' - a \in A \cap B \quad \text{et} \quad b - b' \in A \cap B$$

Or $A \cap B = \{0\}$... contradiction •

Exercice: Montrer que pour A, B deux $\mathbb{K}$ -ev on a

$$A \times B = A \times \{0\} \oplus \{0\} \times B$$

19.2 Translations, sous-espaces affines

19.2.1 Translations

Définition 19.2.1 Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et a dans E , on note $\tau_a : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$\tau_a : x \mapsto a + x$$

On dit que τ_a est la translation de vecteur a ♠

Remarque: Attention τ_a n'est pas un morphisme d'espaces vectoriels (ni de groupe) sauf lorsque $a = 0$

Proposition 19.2.1 L'ensemble $T(E)$ des translations de E est un groupe abélien pour la loi $\circ$, on a en particulier un isomorphisme de groupes $\tau : (E, +) \rightarrow (T(E), \circ)$ défini par

$$\tau : a \mapsto \tau_a$$

♣

Démonstration Puisque

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b} \quad \text{et} \quad \tau_0 = Id_E$$

On en déduit que $\tau_b^{-1} = \tau_{-b} \in T(a)$. C'est donc bien un groupe (abélien car $a + b = b + a$).

Le caractère morphisme est clair.

τ est surjectif par définition de $T(E)$.

Montrons qu'il est injectif

$$a \in \ker \tau \implies \tau_a = 0 \implies \tau_a(0) = 0 \implies a + 0 = 0 \implies a = 0$$

•

Exercice: Soit A un sev de E et $a \in A$, montrer que

$$\tau_a(A) = A$$

19.2.2 Sous-espaces affines

Définition 19.2.2 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev on dit que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de E lorsque $\mathcal{A}$ est l'image d'un sev de E par une translation. i.e. lorsque

$$\text{il existe } A \text{ sev de } E; \quad \text{et} \quad a \in E \quad \text{telsque} \quad \mathcal{A} = \tau_a(A)$$

On note alors $\mathcal{A} = a + A$, A est ce qu'on appelle la direction de $\mathcal{A}$ et a une origine. les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des points. ♠

Remarque: si la direction d'un sea est unique, les origines ne le sont pas en général.

Preuve Supposons qu'il existe deux directions distinctes A et A' pour un même sea $\mathcal{A}$ on a pour a, a' bien choisis

$$\mathcal{A} = a + A \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = a' + A'$$

En particulier $a = a + 0 \in \mathcal{A} = a' + A'$ d'où $a = a' + \beta$ pour un certain $\beta \in A'$.

On en déduit pour tout $\alpha \in E$ (les translations étant des bijections)

$$\alpha \in A \iff \tau_a(\alpha) \in \tau_a(A) \iff \tau_a(\alpha) \in \mathcal{A} = \tau_{a'}(A') \iff \tau_{a'}^{-1}(\tau_a(\alpha)) \in A' \iff \tau_{a-a'}(\alpha) \in A' \iff \tau_\beta(\alpha) \in A'$$

D'où puisque $-\beta \in A'$

$$\alpha \in A \iff \alpha \in \tau_{-\beta}(A') = A'$$

D'où $A = A'$ •

Exercice: Montrer que pour tout $a \in E$ et A, B sev de E

$$A \subset B \implies a + A \subset a + B$$

Exercice: Montrer que pour tout $b \in \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un sea de direction A , on a $\mathcal{A} = b + A$

Exemple: un singleton $\{a\}$ est un sea de direction $\{0\}$ et d'origine a

Exemple: Tout sev F de E est un sea d'origine 0 et de direction F

Exemple: dans le plan $\mathcal{P}$, la droite $M + \mathbb{R}u$ est un sea de $\vec{\mathcal{P}}$ de direction $\mathbb{R}u$ (M est une origine)

Exemple: dans l'espace $\mathcal{E}$, la droite $M + \mathbb{R}u$ est un sea de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\mathbb{R}u$ (M est une origine)

Exemple: dans l'espace $\mathcal{E}$, le plan $M + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ est un sea de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ (M est une origine)

Exemple: Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (I intervalle) l'ensemble des solutions d'une équation linéaire résolue sur I du premier ordre est un sea sous la forme

$$\psi_0 + \mathbb{R}\phi$$

ψ_0 est une origine (solution particulière) et $\mathbb{R}\phi$ est la direction (voir solutions de l'équation homogène)

Exemple: Dans le $\mathbb{C}$ -ev : $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ (I intervalle) l'ensemble des solutions d'une équation linéaire résolue sur I du deuxième ordre à coefficients constants est un sea sous la forme

$$\psi_0 + \mathbb{C}\phi_1 + \mathbb{C}\phi_2$$

ψ_0 est une origine (solution particulière) et $\mathbb{C}\phi_1 + \mathbb{C}\phi_2$ est la direction (voir solutions de l'équation homogène)

Remarque 19.2.1 Etant donné un sea $\mathcal{A}$ de direction A , le choix d'une origine a permet d'identifier les points de $\mathcal{A}$ et les vecteurs de A au travers de la bijection τ_a .

Cette identification induit des lois $+$ et $\cdot$ sur $\mathcal{A}$ qui dépendent du choix de l'origine a , on ne fera donc pas usage systématique de cette identification *

Définition 19.2.3 Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux sea de directions respectives A et B .

On dit que $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ lorsque $A \subset B$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles lorsque $A = B$ ♠

Exemple: les droites $M + \mathbb{R}u$ et $N + \mathbb{R}u$ sont parallèles dans le plan

Exemple: les plans $M + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ et $N + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ sont parallèles dans l'espace

Exemple: Dans l'espace, la droite $M + \mathbb{R}u$ est parallèle au plan $N + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$

Exemple: les solutions de l'équation $y' - y = \cos(t)$ forme un sea parallèle à l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = \tan(2t)$

Proposition 19.2.2 Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux sea de directions respectives A et B .

Pour tout $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset \iff a - b \in A + B$

Et dans le cas $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, alors : $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est un sea de direction $A \cap B$ ♣

Démonstration Soient a, b tel que ci-dessus. Alors (voir exo ci-dessus)

$$\mathcal{A} = a + A \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = b + B$$

D'où si $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ existe on en déduit pour un certain $(\alpha, \beta) \in A \times B$,

$$a + \alpha = x = b + \beta \quad \text{donc} \quad a - b = \beta - \alpha \in A + B$$

Réciproquement si $a - b \in A + B$ alors on peut trouver $(\alpha, \beta) \in A \times B$, tel que

$$a - b = \alpha + \beta \quad \text{donc} \quad \underbrace{a - \alpha}_{\in A} = \underbrace{b + \beta}_{\in B}$$

D'où $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Placons-nous dans le cas $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, soit $c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, on a (cf exo)

$$\mathcal{A} = c + A \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = c + B$$

On en déduit pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} &\iff \exists (\alpha, \beta) \in A \times B; \quad x = c + \alpha = c + \beta \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in A \times B; \quad x = c + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \beta \\ &\iff \exists \alpha \in A \cap B; \quad x = c + \alpha \\ &\iff x \in c + A \cap B \end{aligned}$$

•

Corollaire 19.2.3 Avec les notations ci-dessus on a

$$\mathcal{A} \text{ parallèle à } \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

♣

Preuve Dans le cas où $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ (ie $A \subset B$), on a Soit $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.
Soit pour un certain $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, on a

$$\mathcal{A} = x + A = x + A \cap B = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$$

•

19.3 Applications Linéaires

Voir Fiche 09

19.3.1 Définitions et Exemples

Définition 19.3.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $\varphi : E \rightarrow F$ est un **morphisme d'espaces vectoriels** (ou une **application linéaire**) lorsque :

$$\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E \times E, \quad \varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(y)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de ces applications.

Si de plus φ est bijectif et φ^{-1} est un morphisme, on dit que φ est un **isomorphisme**.

On note $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble de ces isomorphismes

♠

Remarque: On utilise parfois cette propriété en deux temps, $\varphi : E \rightarrow F$ est un **morphisme d'espaces vectoriels** (ou une **application linéaire**) lorsque : si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et} \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)$$

Remarque: On généralise la conservation des CL pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Remarque: Lorsque l'on peut trouver un isomorphisme $\mathbb{K}$ -linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -ev : E et F , on dit que E et F sont isomorphes.

Remarque: $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'ensemble des **formes linéaires**

Exemple: l'application nulle $0 : E \rightarrow F$ qui à tout $x \in E$ associe 0_F est linéaire.

Exemple: $Id_E : E \rightarrow E$ et toute homothétie λId_E sont linéaires ($\lambda \in \mathbb{K}$) et des automorphismes lorsque $\lambda \neq 0$

Exemple: les applications partie réelle Re et partie imaginaire Im sont $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, elles sont $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, mais ne sont pas $\mathbb{C}$ -linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Exemple: $(x, y) \mapsto x + iy$ est un $\mathbb{R}$ -isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$

Exemple: la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (mais n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire)

Exemple: La dérivation $f \mapsto f'$ est $\mathbb{C}$ -linéaire de $C^1(I, \mathbb{C})$ dans $C^0(I, \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}$ -linéaire de $C^1(I, \mathbb{R})$ dans $C^0(I, \mathbb{R})$ (I un intervalle)

Exemple: La dérivation n -ième ($n \in \mathbb{N}^*$) $f \mapsto f^{(n)}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire de $C^n(I, \mathbb{C})$ dans $C^{n-1}(I, \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}$ -linéaire de $C^n(I, \mathbb{R})$ dans $C^{n-1}(I, \mathbb{R})$ (I un intervalle)

Exemple: L'intégration $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est $\mathbb{C}$ -linéaire de $C^0([a, b], \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ -linéaire de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (I un intervalle)

Exemple: la valuation en un point $a \in \mathbb{K}$, $f \mapsto f(a)$ est $\mathbb{K}$ -linéaire de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$

Exemple: Etant donnée une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$, on a l'isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^2$ et $\vec{\mathcal{P}}$

$$(x, y) \mapsto x\vec{i} + y\vec{j}$$

Exemple: Etant donnée une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{\mathcal{E}}$, on a l'isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\mathcal{E}}$

$$(x, y, z) \mapsto x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Exemple: On a l'isomorphisme $\mathbb{K}$ -linéaire entre $\mathbb{K}^{n+1}$ et $\mathbb{K}_n[X]$

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

Exemple: Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fixés dans $\mathbb{K}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), on a l'application $\mathbb{K}$ -linéaire $\Theta : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, définie par

$$\Theta : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Exemple: Pour $x_1, \dots, x_n$ fixés dans E (un $\mathbb{K}$ -ev avec $n \in \mathbb{N}^*$), on a l'application $\mathbb{K}$ -linéaire $\theta : \mathbb{K}^n \rightarrow E$, définie par

$$\theta : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Exercice: Soient A, B deux $\mathbb{K}$ -sev de E . alors $\pi_1 : A \times B \rightarrow E$ et $\pi_2 : A \times B \rightarrow E$ définies par

$$\pi_1 : (a, b) \mapsto a \quad \text{et} \quad \pi_2 : (a, b) \mapsto b$$

sont linéaires

Exercice: Soient A, B supplémentaires dans E . alors $\tau : A \times B \rightarrow E$ définie par

$$\tau : (a, b) \mapsto a + b$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. (i.e. $A \oplus B$ est isomorphe à $A \times B$)

19.3.2 Structures et Propriétés

Proposition 19.3.1 Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev, Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -ev. ♣

Démonstration Puisque $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$ et que $\mathcal{F}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -ev (puisque F l'est). Il suffit de montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev.

En effet. Soient φ, ψ dans $\mathcal{L}(E, F)$ et a dans $\mathbb{K}$.

Pour tout x, y dans E , et λ, μ dans $\mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\lambda x + \mu y) &= \varphi(\lambda x + \mu y) + \psi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) + \lambda\psi(x) + \mu\psi(y) = \lambda(\varphi + \psi)(x) + \mu(\varphi + \psi)(y) \\ (a\varphi)(\lambda x + \mu y) &= a[\varphi(\lambda x + \mu y)] = a[\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)] = a\lambda\varphi(x) + a\mu\varphi(y) = \lambda(a\varphi)(x) + \mu(a\varphi)(y) \end{aligned}$$

On a donc $\varphi + \psi$ et $a\varphi$ dans $\mathcal{L}(E, F)$... CQFD •

Proposition 19.3.2 Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi \in \text{Isom}(E, F) \iff \varphi \text{ est un morphisme bijectif de } E \text{ dans } F$$

♣

Définition 19.3.2 Pour E un $\mathbb{K}$ -ev, on note $GL(E)$ l'ensemble des isomorphismes d'espaces vectoriels de E dans E (automorphismes de E). $(GL(E), \circ)$ est le **groupe** linéaire de E . ♠

Définition 19.3.3

Si $\varphi : (E, +, \cdot) \rightarrow (E, +, \cdot)$ est linéaire, on parle alors d'endomorphisme.

On note $\text{End}(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \cdot)$. ♠

Exercice: Montrer que si $\varphi : E \rightarrow F$ et $\psi : F \rightarrow G$ sont des applications linéaires alors

$$\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$$

Exercice: Montrer que si E est isomorphe à F et F isomorphe à G alors E est isomorphe à G

Proposition 19.3.3 Si E est un $\mathbb{K}$ -ev Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. ♣

Démonstration On sait déjà que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien et que $\circ$ est une loi associative.

Par ailleurs $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ est l'élément neutre pour $\circ$.

Enfin pour tout f, g, h dans $\mathcal{L}(E)$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad [f \circ (g + h)](x) &= f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) \\ \forall x \in E, \quad [(g + h) \circ f](x) &= (g + h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) \end{aligned}$$

D'où $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ et $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, d'où la distributivité de $\circ$ sur $+$... CQFD •

Définition 19.3.4 Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels.

On note $\text{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$ l'image et le noyau de φ . Ils sont définis par :

$$\text{Im}(\varphi) := \varphi(E) \quad \text{et} \quad \ker(\varphi) := \varphi^{-1}(\{0_F\})$$

où 0_F désigne l'élément neutre de $(F, +)$ ♠

Proposition 19.3.4 Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels.

$\text{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement. ♣

Démonstration S'agissant de morphismes de groupes en particulier, on sait déjà que $\text{Im}(\varphi)$ et $\ker \varphi$ sont des sous-groupes de F et E respectivement. Il nous suffit alors de montrer la stabilité par $\cdot$.

Soit λ dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $y \in \text{Im} \varphi$, on a $y = \varphi(x)$ avec $x \in E$, d'où

$$\lambda \cdot y = \lambda \cdot \varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in \text{Im} \varphi$$

Pour tout $x \in \ker \varphi$, on a

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda 0_E = 0_E \quad \text{d'où} \quad \lambda \cdot x \in \ker \varphi$$

•

Proposition 19.3.5 Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi \text{ est surjective} \iff \text{Im}(\varphi) = F$$

$$\varphi \text{ est injective} \iff \ker(\varphi) = \{0_E\}$$

où 0_E désigne l'élément neutre de $(E, +)$



19.3.3 Equations Linéaires

Définition 19.3.5 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

On appelle équation linéaire toute équation d'inconnue x de la forme

$$f(x) = b$$

où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ sont fixés.



Proposition 19.3.6 Notons $\mathcal{S}_b$ l'ensemble solution de l'équation ci-dessus. On a alors : Soit $\mathcal{S}_b = \emptyset$. Soit $\mathcal{S}_b = x_0 + \ker f$ est un sea de direction $\ker f$ et d'origine une solution particulière $x_0 \in E$.



Démonstration Plaçons-nous dans le cas $\mathcal{S}_b \neq \emptyset$, on a alors pour $x_0 \in \mathcal{S}_b$ une solution particulière.

$$f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x) - f(x_0) = 0 \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker f$$



Exemple: Dans le plan, soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un droite orthogonale à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

$$f(\vec{x}) = k \text{ avec } f : \vec{x} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{x} \text{ de } \vec{\mathcal{P}} \text{ dans } \mathbb{R}$$

Exemple: Dans le plan, soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$ est un droite dirigée par $\vec{u}$

$$f(\vec{x}) = k \text{ avec } f : \vec{x} \mapsto \text{Det}(\vec{u}, \vec{x}) \text{ de } \vec{\mathcal{P}} \text{ dans } \mathbb{R}$$

Exemple: Dans l'espace, soit A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs libres. Pour tout réel k l'ensemble Δ_k des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = k$ est un plan dirigée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$f(\vec{x}) = k \text{ avec } f : \vec{x} \mapsto \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) \text{ de } \vec{\mathcal{E}} \text{ dans } \mathbb{R}$$

Exemple: Pour a, b continues sur I , notons $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ l'ensemble des solutions sur I de

$$(\mathcal{E}) \quad y' + ay = b$$

On a alors $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \psi_0 + \mathbb{K}\varphi_1$.

où φ_1 est une solution maximale de l'équation homogène associée, et ψ_0 une solution particulière de $\mathcal{E}$.

$$f(y) = b \text{ avec } f : y \mapsto y' + ay \text{ de } C^1(I, \mathbb{K}) \text{ dans } C^0(I, \mathbb{K})$$

Exemple: Pour a, b, c dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et u continue sur $\mathbb{R}$, notons $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$(\mathcal{G}) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

On a alors $\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \psi_0 + \mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$.

où ψ_0 une solution particulière de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{S}(\mathcal{G}_0)$ l'ensemble solution de l'équation homogène associée.

$$f(y) = u \text{ avec } f : y \mapsto ay'' + by' + cy \text{ de } C^2(I, \mathbb{C}) \text{ dans } C^0(I, \mathbb{C})$$

Exercice: Soient a, b dans $\mathbb{C}$, on cherche l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites u vérifiant

$$(*) \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Soit

$$f : u \mapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } \mathcal{S}(\mathbb{C}) \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{C})$$

l'ensemble recherché est $\mathcal{U} = \ker f$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

Montrer que si α et β sont les racines du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - aX - b$, **Alors**

$$r = (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad s = (\beta^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{resp} \quad s = (n\beta^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{Si } \alpha = \beta)$$

sont des solutions de (*).

Montrer que $\mathbb{C}r$ et $\mathbb{C}s$ sont supplémentaires dans $\mathcal{U}$: $\mathcal{U} = \mathbb{C}r \oplus \mathbb{C}s$

19.4 Bases et Combinaisons Linéaires

Rappelons qu'étant donnée une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E , on appelle K -CL de $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur qui s'écrit sous la forme

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ dans } \mathbb{K}$$

Dans ce paragraphe $(x_1, \dots, x_n)$ désignera une famille finie de vecteurs de E .

On notera

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \end{array}$$

On de façon immédiate

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0\} \\ \text{Im } \theta &= \{x \in E \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n; x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\} \end{aligned}$$

19.4.1 Familles Génératrices

Définition 19.4.1 (Famille Génératrice) On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$ -ev lorsque

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}(x_1, \dots, x_n) = E$$

i.e lorsque tout vecteur de E s'écrit comme $\mathbb{K}$ -CL des vecteurs $x_1, \dots, x_n$

$$\mathbb{K} \cdot x_1 + \dots + \mathbb{K} \cdot x_n = E$$



Remarque: Il suffit en fait de vérifier

$$E \subset \text{Vect}_{\mathbb{K}}(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition 19.4.1 En posant pour $x_1, \dots, x_n$ fixés dans E :

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \end{array}$$

On a alors l'équivalence

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ génératrice} \quad \text{si et seulement si} \quad \theta \text{ surjective}$$



Exercice: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire **surjective** $f : E \rightarrow F$ (E et F deux ev)

Alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est génératrice dans F

Exemple: 1 est générateur du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1$)

Exemple: 1 est générateur du $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{C} \cdot 1$)

Exemple: 1 n'est pas générateur du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \neq \mathbb{R} \cdot 1$)

Exemple: $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i$)

Exemple: $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot i$)

Exemple: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit

$$P = a_0 \cdot 1 + \dots + a_n X^n \quad \text{avec } a_0, \dots, a_n \text{ dans } \mathbb{K}$$

Exercice: Si $E = A + B$ (en particulier si $E = A \oplus B$) et si $(x_1, \dots, x_n)$ (resp $(y_1, \dots, y_m)$) une famille génératrice de A (resp. de B) alors

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \text{ génératrice de } E$$

$$\text{En effet : } E = A + B = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) + \text{Vect}(y_1, \dots, y_m) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

Définition 19.4.2 Etant donnée deux familles de vecteurs $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_m)$. On dit que $\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$ ou encore que $\mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$ lorsque

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \{y_1, \dots, y_m\}$$



Remarque: Dans ce cas on a en particulier $m \geq n$ lorsque les vecteurs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux à deux distincts

Exercice: Montrer que la relation $\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$ (notée ici $\mathcal{F} \prec \mathcal{G}$) induit une relation d'ordre sur l'ensemble des parties finies de E (laquelle?)

Exercice: Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ génératrice et x_{n+1} CL des n premiers vecteurs, alors $((x_1, \dots, x_n))$ est génératrice.

on a la réciproque

Proposition 19.4.2 Toute sur-famille finie d'une famille génératrice est une famille génératrice



Démonstration En notant $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_m)$ une sur-famille de la famille génératrice $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \{y_1, \dots, y_m\}$$

D'où (voir exo)

$$E = \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subset \text{Vect}(\{y_1, \dots, y_m\})$$



Exemple: la famille $(1, j, j^2)$ est génératrice du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$.

En effet, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit

$$z = a + ib = a + \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2j)b \in \text{Vect}(1, j)$$

D'où $(1, j)$ est génératrice, il en va de même pour $(1, j, j^2)$

Proposition 19.4.3 Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille et λ_1, λ_{n-1} dans $\mathbb{K}$ alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier on ne modifie pas le caractère générateur d'une famille en rajoutant à l'un des vecteurs une CL des autres vecteurs.



Démonstration Posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$$

- Montrons que $Vect(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k) \subset Vect(x_1, \dots, x_n)$.

En effet soit $z \in Vect(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k)$ on a alors pour une certaine famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$.

$$z = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k + \alpha_n (x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k + \alpha_n \lambda_k) x_k + \alpha_n x_n \in Vect(x_1, \dots, x_n)$$

CQFD.

- Montrons l'inclusion réciproque $Vect(x_1, \dots, x_n) \subset Vect(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k)$.

On applique ce qui précède à la famille $(y_1, \dots, y_n)$ et on trouve

$$Vect(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{(x_1, \dots, x_n)} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k) \subset Vect(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k})$$

•

Proposition 19.4.4 Soient $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ deux familles telles que $x_1 = y_1$

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}; \quad y_k = x_k + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \dots + \lambda_1 x_1$$

Attention le choix des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ dépend bien évidemment de k ou encore de façon équivalente

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_k - x_k \in Vect((x_p)_{1 \leq p \leq k-1})$$

On dit que la famille $\mathcal{G}$ est échelonnée par rapport à la famille $\mathcal{F}$. Alors $Vect(\mathcal{F}) = Vect(\mathcal{G})$, et en particulier, $\mathcal{G}$ est génératrice dès que $\mathcal{F}$ est génératrice. ♣

Démonstration Récurrence sur n : On pose

$\mathcal{P}(n)$: "Pour tout $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$, $Vect(\mathcal{F}) = Vect(\mathcal{G})$ "

- puisque pour $y_1 = x_1$, on a $Vect(x_1) = Vect(y_1)$, $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

- On suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifiée.

Soit alors $\mathcal{G}' := (\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\mathcal{G}}, y_{n+1})$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F}' := (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\mathcal{F}}, x_{n+1})$, on a alors $\mathcal{G}$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F}$, d'où d'après la propriété de récurrence.

$$Vect(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = Vect(y_1, \dots, y_n) + \mathbb{K}y_{n+1} = Vect(x_1, \dots, x_n) + \mathbb{K}y_{n+1} = Vect(x_1, \dots, x_n, y_{n+1})$$

Et donc d'après la proposition précédente

$$Vect(\mathcal{G}') = Vect(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = Vect(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = Vect(\mathcal{F}')$$

- Conclusion...

•

Exemple: Toute famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$ avec

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg P_k = k$$

est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$

19.4.2 Familles Liées - Familles Libres

Définition 19.4.3 (Famille liée) On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée lorsque l'on peut trouver une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

i.e. le vecteur nul admet une décomposition non triviale comme CL des $x_1, \dots, x_n$ 

Exemple: $(0, x_1, \dots, x_n)$ est liée

Exemple: Deux vecteurs colinéaires forment une famille liée

Exemple: Trois vecteurs coplanaires forment une famille liée

Exemple: Toute sur-famille d'une famille liée est liée

Exemple: Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est CL des autres.

Définition 19.4.4 (Famille libre) On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille libre de $\mathbb{K}$ -ev lorsqu'elle n'est pas liée, i.e.

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

i.e lorsque 0 admet une unique décomposition sous la forme

$$0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$



Remarque: En particulier tous les x_i sont non nuls et deux à deux distincts.

Proposition 19.4.5 En posant pour $x_1, \dots, x_n$ fixés dans E :

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \end{array}$$

On a alors l'équivalence

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \quad \text{si et seulement si} \quad \theta \text{ injective}$$



Exercice: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire **injective** $f : E \rightarrow F$ (E et F deux ev)

Alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre dans F

Corollaire 19.4.6 $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur y de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ admet une unique décomposition sous la forme

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ entièrement déterminé par le choix de y 

Exemple: tout vecteur non nul est libre.

Exemple: $(1, i)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$

Exemple: $\cos$ et $\sin$ forment une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exemple: $(1, \exp(x), \exp(2x), \dots, \exp(nx))$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exemple: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$

Exemple: Si $y \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $(x_1, \dots, x_n)$ libre alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ libre

Exercice: Si $A \cap B = \{0\}$ (en particulier si $E = A \oplus B$) et si $(x_1, \dots, x_n)$ (resp $(y_1, \dots, y_m)$) est une famille libre de vecteurs de A (resp. de B) alors

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \text{ libre}$$

$$\text{En effet : } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = 0 \implies \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\in A} = - \underbrace{\sum_{j=1}^m \mu_j y_j}_{\in B} \in A \cap B = \{0\} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$$

On a la réciproque

Proposition 19.4.7 *Toute sous-famille finie d'une famille libre est une famille libre* ♣

Exemple: la famille $(1, X^2)$ est libre dans $\mathbb{K}_3[X]$.

Proposition 19.4.8 *Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille et λ_1, λ_{n-1} dans $\mathbb{K}$ alors $(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k)$ est libre si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ l'est.*

i.e. on ne modifie pas le caractère libre d'une famille en rajoutant à l'un des vecteurs une CL des autres vecteurs. ♣

Démonstration • Supposons $(x_1, \dots, x_n)$ libre, et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n (x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k) = 0$$

si par l'absurde $\alpha_n \neq 0$ alors

$$x_n = \left(\frac{-\alpha_1 - \lambda_1}{\alpha_n} \right) x_1 + \dots + \left(\frac{-\alpha_{n-1} - \lambda_{n-1}}{\alpha_n} \right) x_{n-1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

ce qui contredit le caractère libre de $\mathcal{F}$, d'où $\alpha_n = 0$ et donc

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = 0$$

or la sous-famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$ étant libre on a aussi

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

• Réciproquement en supposant $(x_1, \dots, x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k)$ libre, on appliquant ce qui précède à

$$y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$$

On a $(y_1, \dots, y_n)$ libre donc $(y_1, \dots, y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k) = (x_1, \dots, x_n)$ libre

Proposition 19.4.9 *Soit $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ une famille échelonnée par rapport à $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$. Alors $\mathcal{G}$ est libre dès que $\mathcal{F}$ est libre* ♣

Démonstration Récurrence sur n : On pose

$\mathcal{P}(n)$: "Pour tout $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{F}$ libre $\implies \mathcal{G}$ libre"

• puisque pour $y_1 = x_1$, on a $y_1 \neq 0 \implies x_1 \neq 0$, $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

• On suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifiée.

Soit alors $\mathcal{G}' := (\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\mathcal{G}}, y_{n+1})$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F}' := (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\mathcal{F}}, x_{n+1})$ et $\mathcal{F}'$ libre.

On a alors $\mathcal{G}$ échelonnée par rapport à $\mathcal{F}$, d'où d'après la propriété de récurrence, $\mathcal{F}$ sous-famille de $\mathcal{F}'$ étant libre, il en va de même pour $\mathcal{G}$.

On sait d'après une précédente proposition que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$, d'où $y_{n+1} - x_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$, ainsi

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y_k$$

Donc d'après la proposition précédente

$$(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \text{ libre} \iff (y_1, \dots, y_n, x_{n+1}) \text{ libre}$$

Or $\mathcal{F}'$ étant libre x_{n+1} ne peut s'écrire comme CL des n premiers vecteurs de $\mathcal{F}'$, i.e.

$$x_{n+1} \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$$

D'où $(y_1, \dots, y_n, x_{n+1})$ est libre... CQFD

• Conclusion...

Exemple: Toute famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$ avec

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg P_k = k$$

est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$

19.4.3 Base et image d'une base

Définition 19.4.5 On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice. i.e.

$$\forall x \in E, \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n; \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Remarque: Pour un x donné l'unique coefficient associé à x_i et apparaissant dans la décomposition selon la base $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ s'appelle l' i -ème coordonnée de x relativement à $\mathcal{B}$

Proposition 19.4.10 En posant pour $x_1, \dots, x_n$ fixés dans E :

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \end{array}$$

On a alors l'équivalence

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base} \iff \text{si et seulement si } \theta \text{ bijective}$$

Exercice: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire **bijective** $f : E \rightarrow F$ (E et F deux ev)

Alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une base de F

Exercice: L'application x_i^* qui à tout x de E associe sa i -ème coordonnée relativement à la base $\mathcal{B}$ est une application linéaire.

Exercice: Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_k = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i\text{ème}}, 0, \dots, 0)$$

est une base du $\mathbb{K}$ -ev $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Proposition 19.4.11 Soit $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ une famille échelonnée par rapport à $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n)$. Alors $\mathcal{G}$ est une base dès que $\mathcal{F}$ est une base

Exemple: Toute famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$ avec

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg P_k = k$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exemple: Soit $E = A \oplus B$ et $(x_1, \dots, x_n)$ (resp $(y_1, \dots, y_m)$) une base de A (resp. de B) alors

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \text{ est une base}$$

cette base est dite adaptée à la décomposition $E = A \oplus B$

Proposition 19.4.12 Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E , on a les équivalences

- (i) $\mathcal{F}$ est une base
- (ii) $\mathcal{F}$ est libre maximale (pour $\prec$)
- (iii) $\mathcal{F}$ est génératrice minimale (pour $\prec$)



Démonstration (i) $\implies$ (ii).

Soit $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ une base, montrons qu'elle est libre maximale.

On sait déjà qu'elle est libre, montrons alors qu'elle est maximale :

Soit $\mathcal{G} := (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \succ \mathcal{B}$ libre.

Supposons par l'absurde $p \neq 0$, alors puisque $\mathcal{B}$ est génératrice x_{n+1} est CL des n premiers vecteurs de $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{G}$ est liée... absurde. D'où

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \text{ libre} \implies \mathcal{G} = \mathcal{B}$$

CQFD

(ii) $\implies$ (i).

Soit $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ libre maximale, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit $y \in E$ quelconque, puisque $(x_1, \dots, x_n, y) \succ \mathcal{B}$, on a par le caractère maximale : $(x_1, \dots, x_n, y)$ liée on peut donc trouver $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha) \neq (0, \dots, 0)$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + \alpha y = 0$$

Si par l'absurde $\alpha = 0$ alors

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$$

i.e $\mathcal{B}$ liée... absurde. Donc

$$y = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\alpha}\right) x_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

CQFD (i) $\implies$ (iii).

Soit $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ une base, montrons qu'elle est génératrice minimale.

On sait déjà qu'elle est génératrice, montrons alors qu'elle est minimale :

Soit $\mathcal{G} := (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \prec \mathcal{B}$ génératrice.

Supposons par l'absurde $p \neq n$ (i.e. $p < n$) et soit $y \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$, alors puisque $\mathcal{B}$ est libre sa sous-famille $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, y)$ l'est aussi.

Or puisque $\mathcal{G}$ est génératrice y est CL des $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$... absurde. D'où

$$\mathcal{G} \prec \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \text{ génératrice} \implies \mathcal{G} = \mathcal{B}$$

CQFD

(iii) $\implies$ (i).

Soit $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ génératrice minimale, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$$

Si par l'absurde $\lambda_p \neq 0$ pour un certain $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors

$$x_p = \sum_{k \neq p} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right) x_k$$

D'où (voir exo) $\mathcal{B}$ privé de x_p est une sous-famille de $\mathcal{B}$ encore génératrice, ce qui contredit le caractère minimal... CQFD •

Proposition 19.4.13 Etant donnée $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ base de E et $\mathcal{G} := (y_1, \dots, y_n)$ famille de F (E et F sont deux ev), il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$(\star) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(x_k) = y_k$$

Ainsi toute application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base ♣

Démonstration

• **Existence :** On sait que $\theta : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ définie par

$$\theta : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

est un isomorphisme linéaire.

Soit $g : \mathbb{K}^n \rightarrow F$ définie par

$$g : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$$

g est $\mathbb{K}$ -linéaire.

En posant $f = g \circ \theta^{-1}$, on a $f : E \rightarrow F$ linéaire et vérifie $(*)$

• **Unicité :** Supposons par l'absurde qu'il existe f' linéaire distincte de f vérifiant $(*)$.
Soit $x \in E$ quelconque, on peut trouver $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

D'où par linéarité

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f'(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) = f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = f(x)$$

et ceci quel que soit $x \in E$, d'où $f = f'$... contradiction

•

19.5 Projecteurs et Symétries

Dans toute cette section, on considère A et B deux sev supplémentaires du $\mathbb{K}$ -ev E :

$$E = A \oplus B$$

Proposition 19.5.1 Soient $u : A \rightarrow F$ et $v : B \rightarrow F$ linéaires (avec F un $\mathbb{K}$ -ev).

Il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$(*) \quad \forall a \in A, \quad f(a) = u(a) \quad \text{et} \quad \forall b \in B, \quad f(b) = v(b)$$

♣

Démonstration

• **Existence :** On sait que $\theta : A \times B \rightarrow E$ définie par

$$\theta : (a, b) \mapsto a + b$$

est un isomorphisme linéaire.

Soit $g : A \times B \rightarrow F$ définie par

$$g : (a, b) \mapsto u(a) + v(b)$$

g est $\mathbb{K}$ -linéaire.

En effet pour $(a, b), (A, B)$ quelconques dans $A \times B$ et λ, μ quelconques dans $\mathbb{K}$

$$g(\lambda(a, b) + \mu(A, B)) = g((\lambda a + \mu A, \lambda b + \mu B)) = u(\lambda a + \mu A) + v(\lambda b + \mu B) = \lambda u(a) + \mu u(A) + \lambda v(b) + \mu v(B)$$

D'où

$$g(\lambda(a, b) + \mu(A, B)) = \lambda[u(a) + v(b)] + \mu[u(A) + v(B)] = \lambda g((a, b)) + \mu g((A, B))$$

En posant $f = g \circ \theta^{-1}$, on a $f : E \rightarrow F$ linéaire et vérifie $(*)$

• **Unicité :** Supposons par l'absurde qu'il existe f' linéaire distincte de f vérifiant $(*)$.
Soit $x \in E$ quelconque, on peut trouver (a, b) dans $A \times B$ tel que $x = a + b$, d'où par linéarité

$$f'(x) = f'(a + b) = f'(a) + f'(b) = u(a) + v(b) = f(a) + f(b) = f(a + b) = f(x)$$

et ceci quel que soit $x \in E$, d'où $f = f' \dots$ contradiction •

Remarque: Ceci signifie que f est entièrement déterminé par ses restrictions aux sev supplémentaires A et B .

Remarque: Dans le cas où $F = E$ et A (resp. B) est stable par u (resp. v), on note $f = \tilde{u} \oplus \tilde{v}$.
Où $\tilde{u} : A \rightarrow A$ (resp. $\tilde{v} : B \rightarrow B$) est l'application linéaire induite par u (resp. v)

19.5.1 Projecteurs

Définition 19.5.1 On appelle projecteur de E sur A parallèlement à B l'application linéaire $p : E \rightarrow E$ définie par

$$p : x \mapsto \begin{cases} x & \text{Si } x \in A \\ 0 & \text{Si } x \in B \end{cases}$$



Remarque: Avec les notations ci-dessus on a $p = Id_A \oplus 0_{B \rightarrow B}$

Exemple: l'application partie réelle $z \mapsto Re(z)$ est un projecteur du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ sur le sous-espace $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$

Exemple: l'application $z \mapsto iIm(z)$ est un projecteur du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ sur le sous-espace $i\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathbb{R}$

Remarque: si $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$, alors $p(x) = a$

Exercice: On pose $u = (1, 1, 1)$, $F = Vect(u)$ et $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les expressions analytiques de la projection p des $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .

Exercice: Même question avec $F := Vect(a)$ et $G := Vect(b, c)$, où $a(1, 2, 1)$, $b(1, 0, -1)$ et $c(-2, 1, 1)$

Proposition 19.5.2 Soient p la projection sur A parallèlement à B et q la projection sur B parallèlement à A on a

$$\begin{aligned} p + q &= Id_E \\ p \circ p &= p & \text{et} & & q \circ q &= q \\ p \circ q &= 0 & \text{et} & & q \circ p &= 0 \\ \ker p &= B & \text{et} & & \ker q &= A \\ Im p &= A & \text{et} & & Im q &= B \end{aligned}$$



Démonstration Soit $x = a + b \in E$, avec $a \in A$ et $b \in B$

- $p(x) + q(x) = a + b = x$
- $p(p(x)) = p(a) = a = p(x)$ et $q(q(x)) = q(b) = b = q(x)$
- $p(q(x)) = p(b) = 0$ et $q(p(x)) = q(a) = 0$
- $p(x) = 0 \iff a = 0 \iff x = b \iff x \in B$
- Soit $y \in E$:

$$y \in Im(p) \iff \exists x \in E; y = p(x) \iff \exists(a, b) \in A \times B; x = a + b \text{ et } y = p(x) \iff \exists a \in A; y = a \iff y \in A$$



Exercice: Montrer que deux sev F et G de E ayant un même supplémentaire H sont isomorphes :

$$E = F \oplus H \text{ et } E = G \oplus H \implies F \text{ isomorphe à } G$$

Remarque: On en déduit $Im p = \ker(Id_E - p)$ et $\ker p = Im(Id_E - p)$.
En particulier

$$E = \ker(p) \oplus Im(p) = \ker(p) \oplus \ker(Id_E - p) = Im(Id_E - p) \oplus Im(p)$$

Proposition 19.5.3 Soit p le projecteur sur A parallèlement à B

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p=A} + \underbrace{(x-p(x))}_{\in \text{ker } p=B}$$

Par ailleurs on a la caractérisation

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad y = p(x) \iff y \in A \quad \text{et} \quad x - y \in B$$

♣

Démonstration Puisque $x = p(x) + (x - p(x))$ et que $p(x) \in \text{Im}(p) = A$ et que $x - p(x) \in \text{ker } p = B$ car

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$$

On en déduit pour tout x, y dans E

$$y = p(x) \implies y \in \text{Im}(p) = A \quad \text{et} \quad x - y = x - p(x) \in \text{ker}(p) = B$$

Réciproquement **Si** $y \in A$ et $x - y \in B$ **Alors** grâce à la décomposition $x = y + (x - y)$ dans $E = A \oplus B$, on en déduit

$$p(x) = y$$

•

Exercice: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E , montrer l'équivalence

$$u \text{ et } p \text{ commutent} \iff \text{ker } p \text{ et } \text{Im}(p) \text{ sont stables par } u$$

Proposition 19.5.4 (Caractérisation) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$p \circ p = p$$

On en déduit que $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ sont supplémentaires et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{ker}(p)$:

$$E = \text{ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$$

♣

Démonstration

• Montrons que $E = \text{ker}(p) + \text{Im}(p)$.

En effet pour tout $x \in E$, on a

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

or $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$, d'où $x - p(x) \in \text{ker } p$ et $p(x) \in \text{Im}(p)$.

• Montrons que $\text{ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$.

En effet si y est dans cette intersection alors

$$y = p(x) \quad \text{avec } x \in E \quad \text{et} \quad p(y) = 0$$

D'où $0 = p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. D'où $\text{ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0\}$, CQFD, car l'inclusion réciproque est évidente.

• Montrons que p est le projecteur annoncé.

Pour tout $x \in E$:

Si $x \in \text{ker } p$ **Alors** $p(x) = 0$.

Si $x \in \text{Im}(p)$ **Alors** $x = p(t)$ avec $t \in E$, et donc $p(x) = p(p(t)) = p(t) = x$

•

Remarque: Ainsi les projecteurs sont exactement les endomorphismes idempotents de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$

Exercice: Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que $p + q$ est un projecteur

Exercice: Soient p et q deux projecteurs tels que $p + q$ soit un projecteur

- Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0$
- Montrer que pour tout $x \in E$, $p(q(x)) - q(p(x)) \in \text{ker } p \cap \text{Im}(p)$
- En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$

Exercice: Soient p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p = 0$, montrer que

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \quad \text{et} \quad \text{ker}(p + q) = \text{ker } p \cap \text{ker } q$$

19.5.2 Symétries

Définition 19.5.2 On appelle *symétrie de E par rapport à A parallèlement à B* l'application linéaire $s : E \rightarrow E$ définie par

$$s : x \mapsto \begin{cases} x & \text{Si } x \in A \\ -x & \text{Si } x \in B \end{cases}$$

♠

Remarque: En particulier s est un isomorphisme involutif

Remarque: Avec les notations ci-dessus on a $p = Id_A \oplus -Id_B$

Remarque: si $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$, alors $s(x) = a - b$

Exemple: l'application $x \mapsto -x$ est la symétrie par rapport à $\{0\}$ parallèlement à E

Exemple: la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$

Proposition 19.5.5 Soit s la symétrie de E par rapport à A parallèlement à B . Alors

$$s = 2p - Id_E$$

Où p est le projecteur sur A parallèlement à B .

En particulier

$$s = p - q$$

Où $q = Id_E - p$ est le projecteur sur B parallèlement à A .

♣

Démonstration Soit $x \in E$, d'après la remarque précédente, puisque $x = p(x) + q(x)$ est la décomposition de x relativement à $A \oplus B$, on a

$$s(x) = p(x) - q(x)$$

•

Remarque: Ainsi l'étude des symétries est équivalente à l'étude des projecteurs.

Proposition 19.5.6 Soient s la symétrie par rapport à A parallèlement à B et t la symétrie par rapport à B parallèlement à A on a

$$\begin{aligned} s + t &= 0_{E \rightarrow E} \\ s \circ s &= Id_E & \text{et} & & t \circ t &= Id_E \\ s \circ t &= -Id_E & \text{et} & & t \circ s &= -Id_E \\ \ker(s - Id_E) &= A & \text{et} & & \ker(t - Id_E) &= B \\ \ker(s + Id_E) &= B & \text{et} & & \ker(t + Id_E) &= A \end{aligned}$$

♣

Démonstration Soit $x = a + b \in E$, avec $a \in A$ et $b \in B$

- $s(x) + t(x) = (a - b) + (b - a) = 0$
- $s(s(x)) = s(a - b) = a + b = x$
- $s \circ t = (-t) \circ t = -t \circ t = -Id_E$
- $s(x) - x = 0 \iff (a - b) - (a + b) = 0 \iff -2b = 0 \iff x \in A$
- $s(x) + x = 0 \iff (a - b) + (a + b) = 0 \iff 2a = 0 \iff x \in B$

•

Remarque: On en déduit $\ker(s - Id_E) = \ker(t + Id_E)$ et $\ker(t - Id_E) = \ker(s + Id_E)$.
En particulier

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E) = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(t - Id_E) = \ker(s + Id_E) \oplus \ker(t + Id_E)$$

Proposition 19.5.7 Soit s la symétrie par rapport à A parallèlement à B

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \ker(s - Id_E) = A} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \ker(s + Id_E) = B}$$

Par ailleurs on a la caractérisation

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad y = s(x) \iff x + y \in A \quad \text{et} \quad x - y \in B$$

♣

Démonstration Soit p la projection sur A parallèlement à B , on a $s = 2p - Id_E$. Pour tout $x \in E$

$$\frac{x + s(x)}{2} = p(x) \in Im(p) = A \quad \text{et} \quad \frac{x - s(x)}{2} = x - p(x) \in \ker(p) = B$$

Par ailleurs

$$y = s(x) \iff \frac{y + x}{2} = p(x) \iff \frac{y + x}{2} \in A \quad \text{et} \quad x - \frac{y + x}{2} = \frac{x - y}{2} \in B$$

Or A et B étant des sev.

$$y = s(x) \iff x + y \in A \quad \text{et} \quad x - y \in B$$

•

Exemple: le morphisme linéaire s de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, définie par

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad s(f)(x) = f(-x)$$

est la symétrie sur $\mathcal{F}_{\text{pair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{F}_{\text{impair}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Proposition 19.5.8 (Caractérisation) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$s \circ s = Id_E$$

On en déduit que $\ker(s - Id_E)$ et $\ker(s + Id_E)$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$:

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E)$$

♣

Démonstration

• Montrons que $E = \ker(s - Id_E) + \ker(s + Id_E)$.

En effet pour tout $x \in E$, on a

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

$$s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) + s(s(x))}{2} = \frac{x + s(x)}{2} \quad \text{et} \quad s\left(\frac{x - s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) - s(s(x))}{2} = -\frac{x - s(x)}{2}$$

Et donc $\frac{x + s(x)}{2} \in \ker(s - Id_E)$ et $\frac{x - s(x)}{2} \in \ker(s + Id_E)$

• Montrons que $\ker(s - Id_E) \cap \ker(s + Id_E) = \{0\}$.

En effet si x est dans cette intersection alors

$$s(x) = x \quad \text{et} \quad s(x) = -x$$

D'où $x = -x$, i.e. $x = 0$.

D'où $\ker(s - Id_E) \cap \ker(s + Id_E) \subset \{0\}$, CQFD, car l'inclusion réciproque est évidente.

• Montrons que s est la symétrie annoncée.

Pour tout $x \in E$:

Si $x \in \ker(s - Id_E)$ **Alors** $s(x) = x$.

Si $x \in \ker(s + Id_E)$ **Alors** $s(x) = -x$

•

Remarque: Ainsi les symétries sont exactement les isomorphismes involutifs de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$

Exercice: Caractériser les applications $\sigma : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ et $\pi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définies par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \sigma(P) = P - 2P(a) \quad \text{et} \quad \pi(P) = P(a)$$