Table des matières

Chapitre 20

Espaces Vectoriels de dimension finie

Préambule

Avec un léger abus de notation on empruntera les notations liées aux ensembles pour les utiliser de facon intuitive dans le cadre des familles de vecteurs.

Ainsi on a les définitions

$$\operatorname{Card}(x_i)_{i\in I} := \operatorname{Card} I$$

$$(x_1,\dots,x_n) \sqcup (y_1,\dots,y_p) := (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)$$

$$y \in (x_i)_{i\in I} \Longleftrightarrow y \in \{x_i \mid i \in I\}$$

$$\varphi\Big((x_i)_{i\in I}\Big) := \Big(\varphi(x_i)\Big)_{i\in I}$$

20.1 Dimension d'un espace vectoriel

20.1.1 Définition et Caractérisations

Définition 20.1.1 *On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice de cardinal[1] fini* ♠

Exemple: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Exemple: $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_n[X]$ sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

Exercice: Montrer que $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ n'est pas un$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Dans toute la suite de ce chapitre, E désigne (sauf mention du contraire) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 20.1.1 (de la base incomplète) *Soit $\mathcal{G}$ une* ***famille génératrice finie*** *de E.*
Si *$\mathcal{L}$ est une* ***sous-famille libre*** *de $\mathcal{G}$ ($\mathcal{L} \prec \mathcal{G}$),*
Alors *on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base $\mathcal{B}$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$*

$$\underbrace{\mathcal{L}}_{libre} \prec \underbrace{\mathcal{B}}_{base} \prec \underbrace{\mathcal{G}}_{generatrice}$$

En particulier :
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.
De même :
De toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie on peut extraire une base. ♣

[1] Cardinal désigne ici le cardinal de l'ensemble des indices associé à la famille

Démonstration On ne traite que la cas $\mathcal{L}$ non vide.
On note $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_m)$ et $\mathcal{L} = (g_1, \ldots, g_p)$ (quitte à permuter l'ordre des vecteurs).

Puisque $\{\text{Card}\, I \mid [\![1,p]\!] \subset I \subset [\![1,m]\!] \quad \text{et} \quad (g_i)_{i\in I}\ \textit{libre}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (contient p) et majorée (par m), on peut trouver un plus grand élément n qui est donc associée à un certain ensemble fini I qui vérifie

$$\text{Card}\, I = n \qquad [\![1,p]\!] \subset I \subset [\![1,m]\!] \quad \text{et} \quad \mathcal{B} := (g_i)_{i\in I}$$

Par définition $\mathcal{B}$ est libre, montrons qu'elle est génératrice.
En effet tout vecteur de $\mathcal{G}$ est CL des vecteurs de $\mathcal{B}$, puisque si $g_j \in \mathcal{G}$ avec $j \in [\![1,m]\!]$

- **Si** $j \in I$ **Alors** $g_j \in \mathcal{B}$ et donc $g_j \in Vect(\mathcal{B})$
- **Si** $j \notin I$ **Alors** $\mathcal{B} \sqcup (g_j)$ est une sur-famille de la famille libre $\mathcal{B}$, de cardinal $n+1$, et donc par définition du plus grand élément $\mathcal{B} \sqcup (g_j)$ n'est plus une famille libre. On peut donc trouver $(\lambda_i)_{i\in I}$ et μ non tous nuls tel que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i g_i + \mu g_j = 0$$

μ ne pouvant être nul (ce qui contredirait le caractère libre de $\mathcal{B}$) on trouve

$$g_j = \frac{1}{\mu} \sum_{i\in I} \lambda_i g_i \in Vect(\mathcal{B})$$

Conclusion :
On a d'après ce qui précède (avec des notations abusives)

$$\mathcal{G} \subset Vect(\mathcal{B})$$

et donc $\mathcal{G}$ étant génératrice

$$E = Vect(\mathcal{G}) \subset Vect(\mathcal{B})$$

et donc l'autre inclusion étant évidente $E = Vect(\mathcal{B})$, i.e. $\mathcal{B}$ est génératrice

De façon plus particulière si E est de dimension finie, il admet une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_q)$ et donc si $(x_1, \ldots, x_r)$ est une famille libre il suffit d'appliquer ce qui précède à

$$\mathcal{L} = (x_1, \ldots, x_r) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G} = (x_1, \ldots, x_r, e_1, \ldots, e_q)$$

puisque tout sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice

Enfin la dernière assertion s'applique à partir d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ en regardant $\mathcal{L} = \emptyset$ (ou encore $\mathcal{L}$ constitué d'un vecteur non nul de $\mathcal{G}$) •

Théorème 20.1.2 (Existence de bases) *Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base (de cardinal fini)* ♣

Démonstration Soit E est de dimension finie

- **Si** $E = \{0\}$ **Alors** $\mathcal{B} = \emptyset$ est une base de E
- **Si** $E \neq \{0\}$ **Alors** tout vecteur non nul x forme une famille libre (x) qui peut être complété en une base de E d'après le théorème de la base incomplète

•

Remarque: On a alors l'équivalence :
E est de dimension finie si et seulement si E admet une base de cardinal fini

Théorème 20.1.3 (Existence d'un supplémentaire)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel A admet (au moins) un supplémentaire ♣

Démonstration D'après 20.2.1 on sait que A est de dimension finie.
Soit $\mathcal{B}_A = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de A, cette basse est une famille libre de E qui peut donc être complétée en une base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
Posons $B := Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et montrons que $E = A \oplus B$

• $E = A + B$
En effet $\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n;\quad x = \underbrace{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p}_{\in A} + \underbrace{\lambda_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \lambda_n x_n}_{\in B}$

• $A \cap B = \{0\}$
En effet soit $x \in A \cap B$, on peut alors trouver $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = \lambda_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \lambda_n x_n$$

Et donc $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p - \lambda_{p+1} x_{p+1} - \ldots - \lambda_n x_n = 0$ d'o grâce au caractère libre de $\mathcal{B}$, on $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ et donc $x = 0$ •

20.1.2 Cardinal d'une famille libre ou génératrice

Lemme 20.1.4 *Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$).*
$\mathcal{M} = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs vecteurs de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad y_i \in Vect(\mathcal{F})$$

Alors *$\mathcal{M}$ est une famille liée*

i.e. Toute famille de de $n+1$ vecteurs qui sont CL de n mêmes vecteurs de E, est une famille liée ♣

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "Toute famille de de $n+1$ vecteurs qui sont CL de n mêmes vecteurs de E, est une famille liée"

• $\mathcal{P}(1)$ est manifestement vraie puisque 2 vecteurs colinéaires à un même troisième sont colinéaires entre eux.

• Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
Soit $\mathcal{F}' = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une famille de $n+1$ vecteurs de E et $\mathcal{M}' = (y_0, y_1, \ldots, y_{n+1})$ une famille $n+2$ vecteurs qui sont CL des vecteurs de $\mathcal{F}'$.

⋆ Si pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$ le coefficient α_i de y_i relativement à x_0 est nul alors

$$\forall i \in [\![0, n+1]\!], \quad y_i \in Vect(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\mathcal{F}})$$

Mais alors d'après $\mathcal{P}(n)$, la famille $\mathcal{M} := (y_1, \ldots, y_{n+1})$ est liée, et il en va donc de même de la sur-famille $\mathcal{F}'$

⋆ Si pour un certain $i \in [\![0, n+1]\!]$ α_i est non nul alors, si par exemple $i = 0$ (les autre cas étant analogues) on a

$$y_0 = \alpha_0 x_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$\alpha_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires et $\alpha_0 \neq 0$ D'où

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \qquad y_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} y_0 \in Vect(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\mathcal{F}})$$

Et donc d'après $\mathcal{P}(n)$ la famille de $n+1$ vecteurs $(y_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} y_0, \ldots, y_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_0} y_0)$ est liée.
On peut donc trouver $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ non tous nuls tel que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k (y_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} y_0) = 0$$

Soit

$$\left(-\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mu_k}{\alpha_0} \right) y_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k y_k = 0$$

où les coefficients : $-\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mu_k}{\alpha_0}, \mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ sont non tous nuls... CQFD

• Conclusion : On a donc montré par récurrence.... •

Corollaire 20.1.5 *Soient $\mathcal{G}$ une famille génératrice de cardinal fini et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.*
Alors *$\mathcal{L}$ est de cardinal fini et*

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leq \mathrm{Card}\,\mathcal{G}$$

♣

Preuve Posons $n = \mathrm{Card}\,\mathcal{G}$.
Supposons par l'absurde $\mathcal{L}$ infini ou $\mathrm{Card}\,\mathcal{L} > n$. On peut alors considérer une sous-famille $\mathcal{L}'$ de $n+1$ vecteurs de $\mathcal{L}$ qui est donc libre tout comme $\mathcal{L}$.
Cependant puisque les $n+1$ vecteurs de $\mathcal{L}'$ sont CL des n vecteurs de $\mathcal{G}$, on en déduit $\mathcal{L}'$ liée... d'où la contradiction •

Définition 20.1.2 *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.*
On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle. ♠

Démonstration D'après le corollaire précédent si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de m vecteurs, on sait que toute base $\mathcal{B}$ est libre et donc finie (et $\mathrm{Card}\,\mathcal{B} \leq m$)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (distinctes ou pas) deux bases de E (dont l'existence est garantie par le théorème d'existence de la base).
Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ génératrice on a $\mathrm{Card}\,\mathcal{B} \leq \mathrm{Card}\,\mathcal{B}'$.
De même puisque $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ génératrice on a $\mathrm{Card}\,\mathcal{B}' \leq \mathrm{Card}\,\mathcal{B}$.
Et donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même cardinal. •

Proposition 20.1.6 *Etant donnée une famille $\mathcal{S}$ de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :*
- **Si** *$\mathcal{S}$ est libre,* **Alors** *$p \leq n$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{S}$ est une base*
- **Si** *$\mathcal{S}$ est génératrice,* **Alors** *$p \geq n$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{S}$ est une base*

♣

Démonstration Soit $\mathcal{B}$ une base de E (son cardinal est n)
• **Si** $\mathcal{S}$ est libre,

Alors d'après le corollaire puisque $\mathcal{B}$ est génératrice on a $p \leq n$.

Par ailleurs si $\mathcal{S}$ est une base on a d'après la définition $n = p$
Montrons que réciproquement **Si** $n = p$ **Alors** $\mathcal{S}$ base.
Puisque $\mathcal{S}$ est libre on peut d'après le théorème de la base incomplète, compléter $\mathcal{S}$ en une base $\mathcal{S}'$ de cardinal n (par définition de la dimension).

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\,\mathcal{S} = \mathrm{Card}\,\mathcal{S}'$$

Et donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ est une base

• **Si** $\mathcal{S}$ est génératrice,

Alors d'après le corollaire puisque $\mathcal{B}$ est libre on a $p \geq n$.

Par ailleurs si $\mathcal{S}$ est une base on a d'après la définition $n = p$
Montrons que réciproquement **Si** $n = p$ **Alors** $\mathcal{S}$ base.
Puisque $\mathcal{S}$ est génératrice on peut d'après le théorème de la base incomplète, extraire de $\mathcal{S}$ une base $\mathcal{S}'$ de cardinal n (par définition de la dimension).

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\,\mathcal{S} = \mathrm{Card}\,\mathcal{S}'$$

Et donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ est une base •

Remarque 20.1.1 *Dans la pratique on retiendra que pour E de dimension n on a les équivalences*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \textit{ est une base de } E &\iff \mathcal{B} \textit{ est libre de cardinal } n \\ &\iff \mathcal{B} \textit{ est génératrice de cardinal } n \end{aligned}$$

*

Remarque: n désigne alors la frontière au delà de la quelle on ne peut espérer être une famille libre, en dessous de laquelle on ne peut être génératrice $\xrightarrow{\mathcal{L} \text{ non génératrice}} n \xrightarrow{\mathcal{L} \text{ liée}} \mathrm{Card}\,\mathcal{L}$

20.1.3 Calcul de bases et de dimensions

Proposition 20.1.7 *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$* ♣

Démonstration Soit F de dimension n et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On sait alors que $\theta : \mathbb{K}^n \to F$ défini par

$$\theta : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$$

est un isomorphisme •

Proposition 20.1.8 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de* ***dimension fini*** *:*

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$ ♣

Démonstration Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'après ce qui précède on peut trouver $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$ et $\theta : \mathbb{K}^n \to F$ isomorphismes. Donc $\theta \circ \varphi^{-1} : E \to F$ est un isomorphisme.

Réciproquement si $\psi : E \to F$ est un isomorphisme, alors en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a $(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))$ une base de F (car ψ isomorphisme). Et on voit que ces deux bases ont même cardinal •

Proposition 20.1.9 *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors il en va de même pour $E \times F$ et*

$$\dim E \times F = \Big(\dim E\Big) + \Big(\dim F\Big)$$

Plus particulièrement **Si** $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ *sont des bases respectives de E et F,* **Alors** *la famille ci-dessous est une base de $E \times F$*

$$\mathcal{B}_{E\times F} = \Big((e_i, 0_F)\Big)_{1\leq i\leq n} \sqcup \Big((0_E, f_j)\Big)_{1\leq j\leq p}$$

♣

Démonstration En reprenant les notations ci-dessus :

- $\mathcal{B}_{E\times F}$ est libre.

En effet soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \sqcup (\mu_i)_{1\leq j\leq p}$ une famille de $n+p$ scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(0_E, f_j) = 0_{E\times F}$$

On en déduit d'après la définition des lois produits

$$(0_E, 0_F) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right)$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0_F$$

D'où puisque les familles $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont libres, on en déduit :

$$(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} = 0_{\mathbb{K}^n} \qquad \text{et} \qquad (\mu_i)_{1\leq j\leq p} = 0_{\mathbb{K}^p}$$

et donc $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \sqcup (\mu_i)_{1\leq j\leq p}$ est la famille nulle.

- $\mathcal{B}_{E\times F}$ est génératrice.

En effet soit (x, y) quelconque dans $E \times F$.
Puisque les familles $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont génératrices on peut trouver $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\mu_i)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de scalaires telles que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$$

On en déduit d'après la définition des lois produits

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_E, f_j)$$

Et donc

$$(x,y) \in Vect(\mathcal{B}_{E\times F})$$

•

Exemple: $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \times \dim \mathbb{R}$ et on retrouve d'ailleurs à partir de la base (1) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Par une récurrence simple on montre que $\dim E^n = n \times \dim E$. Et on retrouve ainsi $\dim \mathbb{R}^n = n$ avec la base canonique construite à partir de la base (1) de $\mathbb{R}$

Remarque 20.1.2 Si *E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$, on a* **Alors** *tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est défini par l'image des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$.*

Plus précisément, en posant

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

où la famille $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est obtenue en prenant les coordonnées des vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_p)$

On a a pour tout $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$ (où $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de x relativement à $\mathcal{B}_E$)

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right)}_{i\text{-eme coordonnée de } u(x)} f_i$$

En effet : $u(x) = u \left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i$

En Particulier (voir Fiche12 : Matrices et Applications linéaires pour la preuve)

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

∗

Remarque: Voici un mnémotechnique pour retenir ces formules :

En notant $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_E}$ les coordonnées de x.

En rassemblant les coordonnées de

$$\begin{array}{ccccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_p) \\ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F} & \dots & \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F} \end{array}$$

sous forme de tableau (on le désignera de façon non formelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ tableau associé au diagramme $(F, \mathcal{B}_F) \xleftarrow{u} (E, \mathcal{B}_E)$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}$$

On écrit alors les coordonnées de $u(x)$ relativement à $\mathcal{B}_F$ grâce à la règle de calcul

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_E} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E} & \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p \\ \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p \\ \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_F} \end{array}$$

Exemple: En munissant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs bases canoniques $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ le tableau

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}$$

correspond à l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dont l'expression analytique est

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (3x + 5y, x - y, 5x)$$

Exemple: En munissant $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ de leurs bases canoniques $\mathcal{C}_1 = (1, X)$ et $\mathcal{C}_2 = (1, X, X^2)$, le tableau correspondant à l'application $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X]))$ définie par $D : P \mapsto P'$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}_2}$$

Exercice: Ecrire le tableau dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$u : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, z + 2x, y)$$

Corollaire 20.1.10 *Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.*
Toute forme linéaire ϕ de E ($\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$) se caractérise par la donnée de p scalaires $a_1, \dots, a_p$ tels que

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(\varphi) = [a_1 \cdots a_p]_{1 \leftarrow \mathcal{B}_E}$$

(*) Pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ vecteur de E et sa décomposition relativement à $\mathcal{B}_E$, $\quad \phi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i x_i$ ♣

Preuve Il est clair que $(*)$ caractérise une forme linéaire.
Réciproquement toute forme linéaire ϕ vérifie $(*)$ où l'on a posé

$$a_1 = \phi(e_1), \dots, a_p = \phi(e_p)$$

•

Exemple: l'application $(x, y, z) \mapsto x + y + 3z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$

Exercice: Montrer que les formes linéaires définies par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \qquad \left(e_i^*(e_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \ e_i^*(e_j) = 0\right)$$

forment une base $(e_1^*, \dots, e_p^*)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On dit qu'il s'agit de la base duale de $(e_1, \dots, e_p)$.
$e_i^*(x)$ n'est rien d'autre que la i-eme coordonnée du vecteur x relativement à $\mathcal{B}_E$

20.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 20.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
Tout sous-espace vectoriel A de E est de dimension finie et

$$\dim A \leq \dim E$$

avec égalité si et seulement si $A = E$. ♣

Démonstration Soit $A \neq \{0\}$ (sinon c'est trivial) et $x \neq 0$ dans A, on considère

$$\{q \in \mathbb{N} \mid \text{ il existe } \mathcal{B} \text{ famille libre de q vecteurs de A contenant } x\}$$

Cette partie de $\mathbb{N}$ est non vide (contient 1) et majoré (par $\dim E$). Soit p son plus grand élément ($p \leq \dim E$), on a alors une famille $\mathcal{B}_A := (x_1, \ldots, x_p)$famille libre de p vecteurs de A, il suffit de montrer qu'ils sont générateurs de A. on aura alors A de dimension finie et $\dim A = p \leq \dim E$

Soit $y \in A$, par maximalité $(x_1, \ldots, x_p, y)$ est liée et donc y est CL de $x_1, \ldots, x_p$... CQFD

Dans le cas d'égalité ($\dim A = \dim E$), on a alors $\mathcal{B}_A$ est une famille libre de E de $\dim E$ vecteurs, c'est donc aussi une famille génératrice de E, or par définition de la base $\mathcal{B}_A$ est aussi génératrice de A. Donc

$$A = Vect(\mathcal{B}_A) = E$$

la réciproque est évidente. •

Remarque: E est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$:

$$(A \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \text{et} \quad \dim A = \dim E) \Longrightarrow A = E$$

Exemple: $\dim E = 0 \Longleftrightarrow E = \{0\}$

Définition 20.2.1 (Rang d'une famille de vecteurs) *Soit $\mathcal{L} = (u_1, \ldots, u_q)$ une famille de vecteurs de E, on appelle rang de $\mathcal{L}$ la dimension de l'espace vectoriel quelle engendre*

$$rg(\mathcal{L}) = \dim\left(Vect(\mathcal{L})\right) \qquad i.e. \qquad rg(u_1, \ldots, u_q) = \dim\left(Vect(u_1, \ldots, u_q)\right)$$

♠

Remarque: Puisque $Vect(\mathcal{L})$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $rg(\mathcal{L}) \leq \dim E$.
$\mathcal{L}$ est génératrice de E si et seulement si $rg(\mathcal{L}) = \dim E$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$ $\text{rg}\left((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\right) = 1$, puisque $Vect((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)) = \mathbb{R}(1,1,1)$

Exercice: $(u_1, \ldots, u_q)$ est libre si et seulement si $rg(u_1, \ldots, u_q) = q$

Proposition 20.2.2 (Formule de Grassmann)
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim A \cap B$$

En particulier : **Si** $E = A \oplus B$ **Alors** $\dim E = \dim A + \dim B$ ♣

Preuve Traitons d'abord le cas particulier $E = A \oplus B$.
Soient $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ bases respectives de A et B, on sait alors (voir exemples du chapitre précédent) que $\mathcal{B}_A \sqcup \mathcal{B}_B$ est une base de E

$$\dim(E) = \text{Card}\left(\mathcal{B}_A \sqcup \mathcal{B}_B\right) = \text{Card}\left(\mathcal{B}_A\right) + \text{Card}\left(\mathcal{B}_B\right) = \dim A + \dim B$$

Traitons le cas général.
Soit F un supplémentaire de $A \cap B$ dans A, i.e.

$$(*) \qquad\qquad A = F \oplus A \cap B$$

Montrons que

$$(**) \qquad A + B = F \oplus B$$

En effet F est un sous-espace vectoriel A donc de $A+B$, et bien évidemment B est un sous-espace vectoriel de $A + B$.

• Montrons que $F \cap B = \{0\}$
Comme $F \subset A$, on a $F \cap A = F$ d'où grâce à $(*)$

$$F \cap B = F \cap (A \cap B) = \{0\}$$

• Montrons que $A + B = F + B$.
Soit $x \in A + B$, par définition on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
Or d'après $(*)$ $a = f + \beta$ avec $f \in F$ et $\beta \in B$.
D'où

$$x = a + b = f + \underbrace{\beta + b}_{\in B} \in F + B$$

⋆ **Conclusion** :
En utilisant le cas particulier sur les identités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\dim A = \dim F + \dim A \cap B \qquad \text{et} \qquad \dim(A + B) = \dim F + \dim B$$

D'où la formule de Grassmannn en injectant l'égalité $\dim F = \dim A - \dim A \cap B$ dans la deuxième identité •

Remarque: Ces formules ne sont pas sans rappeler celles des cardinaux d'une réunion (resp. réunion disjointe) d'ensembles finis.

Corollaire 20.2.3 *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E (espace vectoriel de dimension finie). On a alors*

$$E = A \oplus B \iff (E = A + B \quad \textit{et} \quad \dim E = \dim A + \dim B)$$

♣

Preuve D'après la formule de Grassmannn

$$\begin{aligned} E = A + B \quad \text{et} \quad \dim E = \dim A + \dim B \quad &\iff \quad E = A + B \quad \text{et} \quad \dim A \cap B = 0 \\ &\iff \quad E = A + B \quad \text{et} \quad A \cap B = \{0\} \end{aligned}$$

•

20.3 Rang d'une application linéaire

20.3.1 Définition et Théorème du Rang

Dans toute la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 20.3.1 *Le rang de l'application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est par définition la dimension de l'image de φ.*

$$rg\,(\varphi) = \dim(Im\,\varphi)$$

♠

Proposition 20.3.1 *Quels que soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et la base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a*

$$rg\,(\varphi) = rg\,(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$$

On note parfois avec un léger abus de notation $rg(\varphi) = rg(\varphi(\mathcal{B}))$. ♣

Démonstration
Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = Vect(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$, i.e. $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$.
En effet quelque soit $y \in \operatorname{Im}\varphi$, on a

$$y = \varphi(x) \qquad avec\ x \in E$$

or puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, $\quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$.
D'où par linéarité de φ

$$y = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(e_k)$$

CQFD •

Proposition 20.3.2 (Invariance du rang par composition avec un isomorphisme)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

- **Si** *f est un isomorphisme* **Alors** $rg\,(g \circ f) = rg\,(g)$
- **Si** *g est un isomorphisme* **Alors** $rg\,(g \circ f) = rg\,(f)$

Autrement, dit le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche ou à droite avec un isomorphisme. ♣

Démonstration Munissons E et F de bases respectives

$$\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$$

• Puisque f est un isomorphisme $\mathcal{B}' := f(\mathcal{B}_E) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de F et donc

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_p))) = \operatorname{rg}(g(\mathcal{B}')) = \operatorname{rg}(g)$$

• Puisque g est un isomorphisme de F dans G, elle induit un isomorphisme entre $\operatorname{Im} f$ et $g(\operatorname{Im} f)$ (cette application induite est manifestement linéaire et surjective, elle injective puisque g l'est).
On en déduit

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim(g \circ f)(E) = \dim g(f(E)) = \dim g(\operatorname{Im} f) = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$$

•

Exercice: Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g\,|_{\operatorname{Im} f})$

Théorème 20.3.3 (du rang) *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, on a alors $Im\, f$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F et on a la formule*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim Im\, f = \dim \ker f + rg\,(f)$$

♣

Démonstration Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E (dont l'existence est garantie par la proposition 20.1.3).
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(H, \operatorname{Im} f)$ définie par

$$\varphi : x \mapsto f(x)$$

étant donnée que φ est induite par f, elle est manifestement linéaire. Montrons qu'elle est bijective.

• φ est surjective
Soit $y \in \operatorname{Im} f$, on a alors $y = f(x)$ avec $x \in E$, on note $x = a + b$ avec $a \in \ker f$ et $b \in H$ grâce à la décomposition $E = \ker f \oplus H$.
On en déduit

$$y = f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b) = f(b) = \varphi(b)$$

• φ est injective.
Soit $x \in \ker\varphi$ alors

$$x \in H \qquad \text{et} \qquad x \in \ker f$$

i.e $x \in \ker f \cap H = \{0\}$, d'où $x = 0$, i.e. $\ker \varphi = \{0\}$

• Conclusion

On par isomorphie de φ, $\dim H = \dim \operatorname{Im} f$.
D'où puisque $E = \ker f \oplus H$ $\quad \dim E = \dim \ker f + \dim H = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ •

Remarque: On a en fait démontré que tout supplémentaire de $\ker f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

Corollaire 20.3.4 *Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a les équivalences*

$$f \text{ injective} \iff rg(f) = \dim E$$

$$f \text{ surjective} \iff rg(f) = \dim F$$

♣

Preuve On a les équivalences (grâce à la formule du rang pour la première)

$$\ker f = \{0\} \iff \dim \ker f = 0 \iff \operatorname{rg}(f) = \dim E$$

$$\operatorname{Im} f = F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F \iff \operatorname{rg}(f) = \dim F$$

•

20.3.2 Application aux isomorphismes

Proposition 20.3.5 (Caractérisation des isomorphismes)
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on suppose de plus $\dim E = \dim F$, alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) f est un isomorphisme
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

♣

Démonstration Il suffit de montrer que $(ii) \iff (iii)$. Ce qui résulte immédiatement du théorème du rang puisque :

$$\operatorname{Im} f = F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim E \iff \dim \ker f = 0 \iff \ker f = \{0\}$$

•

Remarque: Cette proposition n'est pas sans rappeler son analogue dans le cas des ensembles finis de même cardinal.

Proposition 20.3.6 (Caractérisation des automorphismes)
*Soit f un endomorphisme de E (rappelons que E est de **dimension finie**).*
Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

(i) f est un automorphisme
(ii) f est injective
(iii) f est surjective
(iv) f admet un inverse à gauche (il existe $g \in \mathcal{L}(E)$, tel que $g \circ f = Id_E$)
(v) f admet un inverse à droite (il existe $h \in \mathcal{L}(E)$, tel que $f \circ h = Id_E$)

♣

Démonstration d'après la proposition précédente les 3 trois premières assertions sont équivalentes.
Il est évident que (i) implique (iv) et implique (v).
il suffit donc de montrer que (iv) implique (ii) et (v) implique (iii).

Or d'après la preuve de la caractérisation d'une bijection au moyen d'une inverse (à gauche et à droite) pour la loi "$\circ$", on sait que

Si f admet un inverse à gauche **Alors** f est injective

Si f admet un inverse à droite **Alors** f est surjective

...CQFD •

20.3.3 Application aux formes linéaires

Définition 20.3.2 *On appelle forme linéaire de E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, leur ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est parfois noté E^* ou E'* ♠

Exercice: Montrer que toute forme linéaire non nulle est une application surjective

solution :
Si φ est une forme linéaire on a $\operatorname{rg}(\varphi) \leq 1$ car $\dim \mathbb{K} = 1$, mais puisque $\varphi \neq 0$, on a $\{0\} \subsetneq \operatorname{Im} \varphi$ et donc $\dim \operatorname{Im} \varphi \geq 1$... donc $\operatorname{rg}(\varphi) = 1 = \dim \mathbb{K}$, i.e. φ est surjective

Définition 20.3.3 (droite vectorielle et hyperplan) *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-espaces vectoriels de E.*
On dit que $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle de E lorsque $\dim \mathcal{D} = 1$
On dit que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E lorsque H admet un droite vectorielle comme supplémentaire dans E. ♠

Proposition 20.3.7 *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E*

$\mathcal{H}$ est un hyperplan si et seulement si $\dim \mathcal{H} = \dim E - 1$

En particulier tout supplémentaire d'un hyperplan est une droite vectorielle. ♣

Preuve Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan **Alors** on peut alors trouver une droite vectorielle $\mathcal{D}_0$ supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans E.
D'où puisque $E = \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_0$, on en déduit

$$\dim E = \dim \mathcal{H} + 1$$

Réciproquement **Si** $\dim \mathcal{H} = \dim E - 1$ tout supplémentaire de $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ vérifie

$$E = \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}$$

D'où $\dim E = \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{D} = \dim E - 1 + \dim \mathcal{D}$, d'où $\dim \mathcal{D} = 1$ i.e. $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle.... CQFD •

Exemple: toute droite du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (par exemple la droite d'équation $2x+3y=0$) est une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, mais c'est aussi un hyperplan de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (dans notre exemple un supplémentaire est donné par $-3x+2y=0$).

Exemple: toute droite du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (par exemple la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$) est une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$

Exemple: tout plan vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (par exemple la droite d'équation $2x+3y+5z=0$) est un hyperplan de $\overrightarrow{E}$ (dans notre exemple un supplémentaire est donné par $\mathbb{R}(2,3,5)$).

Remarque: Les droites affines ne sont pas en général des droites vectorielles ou des hyperplans de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp $\overrightarrow{\mathcal{E}}$)(car ce ne sont pas toujours des sous-espaces vectoriels)

Proposition 20.3.8 *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E*

$\mathcal{H}$ est un hyperplan de E si et seulement si $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle ♣

Démonstration
• **Si** $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ **Alors**

En particulier φ est surjective et donc $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ et donc par le théorème du rang tout supplémentaire $\mathcal{H}$ vérifie

$$\dim \mathcal{H} = \dim \ker \varphi = \dim E - \operatorname{rg}(\varphi) = \dim E - 1$$

• **Si** $\mathcal{H}$ est un hyperplan alors $\mathcal{H}$ admet une droite vectorielle $\mathcal{D} := \mathbb{K}e_1$ comme supplémentaire. Soit $(e_2, \ldots, e_p)$ une base de $\mathcal{H}$. puisque $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{H}$, on a une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de $\mathcal{H}$ et donc l'application φ qui à tout vecteur x de associe sa première coordonnée relativement à $\mathcal{B}$ est une forme linéaire[2].

[2] il s'agit de la forme linéaire e_1^*

φ est non nulle (puisque $\varphi(e_1) = 1$) et de plus

Pour tout $x \in E$, en notant $x = x_1e_1 + \ldots + x_pe_p$ sa décomposition dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$x \in \ker\varphi \iff x_1 = 0 \iff x \in Vect(e_2, \ldots, e_p) = \mathcal{H}$$

D'où $\mathcal{H} = \ker\varphi$ •

Remarque 20.3.1 *Si on munit E d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ on en déduit le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E si et seulement si il existe p scalaires $a_1, \ldots, a_p$ non tous nuls tel que $\mathcal{H}$ a pour équation relativement à $\mathcal{B}_E$ en $(x_1, \ldots, x_p)$*

$$a_1x_1 + \ldots + a_px_p = 0$$

*

Exemple: l'ensemble des quadruples (x, y, z, t) vérifiant

$$2x - 3y + \sqrt{2}z + t = 0$$

est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$

Exercice: Donner une droite vectorielle supplémentaire de cette droite

Proposition 20.3.9 *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de E.*
Tout vecteur non nul a n'appartenant pas $\mathcal{H}$ engendre une droite vectorielle supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans E.

les formes linéaires dont le noyau est $\mathcal{H}$ sont proportionnelles entre elles ♣

Démonstration Soit $a \notin \mathcal{H}$, notons $H = \ker\varphi$ avec φ une forme linéaire non nulle.
Puisque $\varphi(a) \neq 0$ la preuve de la proposition précédente nous montre que pour $\mathcal{D} := \mathbb{K}a$ on a

$$E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{H}$$

Par ailleurs si $\mathcal{H} = \ker\psi$ avec ψ une forme linéaire non nulle, alors Puisque $a \notin \mathcal{H}$, on $\psi(a) \neq 0$ et donc en posant $K := \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$

On a pour tout $x \in E$, en notant $x = \lambda a + b$ sa décomposition relative à $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{H}$

$$(\varphi - K\psi)(x) = \lambda(\varphi - K\psi)(a) + (\varphi - K\psi)(b) = 0$$

D'où $\varphi = K\psi$... CQFD •

Remarque: Ceci justifie le fait que l'équation d'un hyperplan n'est pas unique, mais que deux équations définissent le même hyperplan si et seulement si les coefficients d'une équation sont proportionnels, d'un même facteur, aux coefficients de l'autre équation

Exemple: $x + y + z + t = 0$ et $2x + 2y + 2z + 2t = 0$ définissent le même hyperplan $\mathcal{H}$

Exemple: l'hyperplan $\mathcal{H}'$ d'équation $x - y + z + t = 0$ est distinct de $\mathcal{H}$