

Table des matières

21 Matrices	3
21.1 Opérations sur les matrices	3
21.1.1 Définitions et structure vectorielle	3
21.1.2 Isomorphismes canoniques : Matrices - Applications linéaires	5
21.1.3 Produit de matrices	6
21.1.4 Transposition	8
21.1.5 Matrices Carrées	10
21.1.5.1 Structure Algébrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	10
21.1.5.2 Matrices triangulaires et diagonales	11
21.1.5.3 Matrices inversibles	13
21.1.5.4 Matrices symétriques et antisymétriques	15
21.2 Matrices et Applications Linéaires	15
21.2.1 Matrices Rectangulaires et Morphismes	16
21.2.1.1 Matrice et Famille de vecteurs	16
21.2.1.2 Matrices et formes linéaires	16
21.2.1.3 Matrice et Application linéaire	17
21.2.1.4 Action d'un Morphisme sur un vecteur	17
21.2.1.5 Opérations entre Morphismes	18
21.2.2 Matrices Carrées et Endomorphismes	19
21.2.3 Matrices de Passage et Isomorphismes	20
21.2.3.1 Application aux vecteurs	21
21.2.3.2 Application aux morphismes	21
21.2.3.3 Application aux endomorphismes	22
21.3 Rang d'une matrice	22
21.3.1 Définition et Propriétés	22
21.3.2 Methode du Pivot de Gauss	24

Chapitre 21

Matrices

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n, p et q sont trois entiers non nuls.

21.1 Opérations sur les matrices

21.1.1 Définitions et structure vectorielle

Définition 21.1.1 On appelle *matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$* , la donnée d'une famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de scalaires indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on la représente sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.



Exemple: la matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée la matrice nulle et notée $\mathbf{0}$

Remarque 21.1.1

lorsque $n = p$, on parle de *matrice carrée*.

lorsque $n = 1$, on parle de *matrice ligne*.

lorsque $p = 1$, on parle de *matrice colonne*.

*

Remarque 21.1.2 Dans la suite on adoptera la convention suivante. les matrices seront notées en lettre majuscules et ses coefficients reprendra la même lettre en minuscule.

Par exemple pour A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

*

Exemple: Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_{ij} la matrice dont les coefficients sont

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad e_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 21.1.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note L_i et C_j les

matrices

$$L_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad C_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On les appelle la i -ème matrice ligne de A , et la j -ième matrice colonne de A .

On note parfois

$$A := \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

♠

Définition 21.1.3 On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une loi notée $+$ définie par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \quad A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une loi notée $\cdot$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

♠

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 12 \\ 5 & \pi & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 1 \\ 5 & i & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 13 & 13 \\ 10 & \pi + i & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -5 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & -15 \\ 36 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque: En notant $C_1, \dots, C_p$ (resp $L_1, \dots, L_n$) les colonnes (resp les lignes) de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Et en notant $C'_1, \dots, C'_p$ (resp $L'_1, \dots, L'_n$) les colonnes (resp les lignes) de $A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$A + A' = \begin{pmatrix} C_1 + C'_1 & \cdots & C_j + C'_j & \cdots & C_p + C'_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} L_1 + L'_1 \\ \vdots \\ L_i + L'_i \\ \vdots \\ L_n + L'_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot C_1 & \cdots & \lambda \cdot C_j & \cdots & \lambda \cdot C_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot L_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot L_i \\ \vdots \\ \lambda \cdot L_n \end{pmatrix}$$

Proposition 21.1.1 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \times p$.

Plus précisément, la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique.

♣

Démonstration

- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien :
- $+$ est associative, $\mathbf{0}$ est élément neutre et $-A := (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est le symétrique de $A := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

- " $\cdot$ " est distributif à gauche

$$\lambda \cdot \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + \lambda \cdot (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- " $\cdot$ " est distributif à droite

$$(\lambda + \mu) \cdot \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + \mu \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- Associativité mixte

$$(\lambda \times \mu) \cdot \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = (\lambda \mu a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda \cdot \left(\mu \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$$

- $1_{\mathbb{K}}$ est opérateur neutre

$$1 \cdot \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = (1 \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est génératrice

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij}$$

- $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est libre

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij} = \mathbf{0} \implies (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \mathbf{0}$$

•

21.1.2 Isomorphismes canoniques : Matrices - Applications linéaires**Proposition 21.1.2**

- l'application qui à tout vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ associe la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel au moyen duquel on identifie souvent $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

- l'application qui à toute forme linéaire ω de $\mathbb{K}^p$ caractérisée par la famille de coefficients¹ $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ associe la matrice ligne

$$(\beta_1 \cdots \beta_p)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel au moyen duquel on identifie souvent $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

♣

Démonstration Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{K}^n)^2$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

¹il s'agit des coordonnées de ω relativement à la base duale de la base canonique de $\mathbb{K}^p$

est canoniquement associé à la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pour la preuve concernant les formes linéaires voir proposition ci-dessous

Remarque: En particulier on identifie souvent $\mathbb{K}$ à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$

Proposition 21.1.3 Soit Θ l'application qui à tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ associe la matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, où

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad f(x_1, \dots, x_p) = \left(\sum_{j=1}^p a_{1j}x_j, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j}_{i\text{-ème coordonnée}}, \dots, \sum_{j=1}^p a_{nj}x_j \right)$$

Θ est un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelé isomorphisme canonique ♣

Remarque 21.1.3 La matrice $\Theta(f)$ n'est autre que le tableau $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$ associé à f relativement au diagramme

$$(\mathbb{K}^n, \mathcal{C}) \xleftarrow{f} (\mathbb{K}^p, \mathcal{B})$$

Où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$

Démonstration[de la proposition]

Etant donné la remarque on sait déjà qu'il s'agit d'une bijection.

Il suffit de montrer la linéarité :

Pour f, g dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$, on note $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} := \Theta(f)$ et $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} := \Theta(g)$

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda f(x_1, \dots, x_p) + \mu g(x_1, \dots, x_p) = \lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right)_{1 \leq i \leq n} + \mu \left(\sum_{j=1}^p b_{ij}x_j \right)_{1 \leq i \leq n}$$

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad (\lambda f + \mu g)(x_1, \dots, x_p) = \left(\sum_{j=1}^p \lambda \cdot a_{ij}x_j + \mu \cdot b_{ij}x_j \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{j=1}^p (\lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij})x_j \right)_{1 \leq i \leq n}$$

D'où

$$\Theta(\lambda f + \mu g) = (\lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + \mu \cdot (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda \Theta(f) + \mu \Theta(g)$$

21.1.3 Produit de matrices

Définition 21.1.4 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices où

$$\boxed{\text{Nombre de COLONNES de } A = \text{Nombre de LIGNES de } B}$$

On note $A \times B$ où tout simplement AB la matrice

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Remarque: Un moyen mnémotechnique pour retenir cette formule est

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

Avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple: En identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p a_k b_k$$

Remarque 21.1.4 En notant $L_1, \dots, L_n$ les matrices ligne de A et $C_1, \dots, C_q$ les matrices colonnes de B , on obtient avec un léger abus de notation

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & \cdots & L_1 C_j & \cdots & L_1 C_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_i C_1 & \cdots & L_i C_j & \cdots & L_i C_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_n C_1 & \cdots & L_n C_j & \cdots & L_n C_q \end{pmatrix}$$

*

Exercice: Montrer avec les mêmes notations

$$AB = \begin{pmatrix} AC_1 & \cdots & AC_j & \cdots & AC_q \end{pmatrix}$$

i.e. $AC_1, \dots, AC_q$ sont les matrices colonnes de AB

Proposition 21.1.4 (Associativité) Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$, on a

$$A(BC) = (AB)C$$

♣

Exercice: le prouver, en montrant que

$$A(BC) = \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq q}} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} = (AB)C$$

Exercice: Avec les mêmes notations, montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Proposition 21.1.5 (bilinéarité) l'application

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

est bilinéaire :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (B, B') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad A(\lambda B + \mu B') &= \lambda AB + \mu AB' \\ \forall (A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda A + \mu A')B &= \lambda AB + \mu A'B \end{aligned}$$

♣

Démonstration Avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} A(\lambda B + \mu B') &= \left(\sum_{k=1}^p a_{ik}(\lambda b_{kj} + \mu b'_{kj}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \left(\lambda \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \mu \sum_{k=1}^p a_{ik} b'_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \lambda AB + \mu AB' \\ (\lambda A + \mu A')B &= \left(\sum_{k=1}^p (\lambda a_{ik} + \mu a'_{ik}) b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \left(\lambda \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \mu \sum_{k=1}^p a'_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \lambda AB + \mu A'B \end{aligned}$$

•

Proposition 21.1.6

Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à M (i.e. $M = \Theta(f)$). Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$ (resp. $y \in \mathbb{K}^n$) en notant X (resp. Y) le vecteur colonne canoniquement associé à x (resp. y), on a

$$y = f(x) \iff Y = MX$$

♣

Démonstration En posant $M := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y := (y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff (y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_p) \\ &\iff (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) = \left(\sum_{j=1}^p a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{nj} x_j \right) \\ &\iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &\iff Y = MX \end{aligned}$$

•

Remarque: Cette relation nous est déjà familière étant donné que $\Theta(f)$ correspond à $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ relativement aux bases canoniques.

21.1.4 Transposition

Définition 21.1.5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note tA la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients $(\tilde{a}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont obtenus à partir des coefficients de A par permutation de l'indice de la ligne avec celui de la colonne

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \text{ ligne} \\ 1 \leq j \leq p \text{ colonne}}} \implies {}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \text{ ligne} \\ 1 \leq j \leq n \text{ colonne}}}$$

♠

Exemple:

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ A & 2 & d & e \\ B & D & 3 & f \\ C & E & F & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A & B & C & \alpha \\ a & 2 & D & E & \beta \\ b & d & 3 & F & \gamma \\ c & e & f & 4 & \delta \end{pmatrix}$$

Exercice: On note $L_1, \dots, L_n$ et $C_1, \dots, C_p$ les matrices lignes et colonnes respectivement de A . Montrer que ${}^t C_1, \dots, {}^t C_p$ et ${}^t L_1, \dots, {}^t L_n$ sont les matrices lignes et colonnes respectivement de ${}^t A$.

$${}^t \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t C_1 \\ \vdots \\ {}^t C_j \\ \vdots \\ {}^t C_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t L_1 & \dots & {}^t L_i & \dots & {}^t L_n \end{pmatrix}$$

Proposition 21.1.7

la transposition est un isomorphisme involutif d'espace vectoriel entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^t({}^t A) = A$$

♣

Démonstration Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ, μ deux scalaires.

$${}^t(\lambda A + \mu B) = {}^t(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$$

$${}^t({}^t A) = {}^t \left({}^t(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = {}^t \left((a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \right) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = A$$

•

Proposition 21.1.8 (Compatibilité avec le produit)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ respectivement, on a

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$$

♣

Démonstration Posons

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \quad \text{et} \quad AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

On a en particulier

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

on en déduit

$${}^t A = \underbrace{(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}}_{\tilde{a}_{ij}} \quad {}^t B = \underbrace{(b_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}}_{\tilde{b}_{ij}} \quad \text{et} \quad {}^t(AB) = \underbrace{(c_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}}_{\tilde{c}_{ij}}$$

En particulier en notant ${}^t B {}^t A = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^p \tilde{b}_{ik} \tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^p b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = \tilde{c}_{ij}$$

•

21.1.5 Matrices Carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$

Remarque: On note I_n la matrice $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de ceux de la **diagonale principale** qui valent 1

$$I_n = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{\ddots} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \textcolor{red}{\ddots} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix}$$

δ_{ij} est ce qu'on appelle le symbole de Kronecker d'indice i, j

21.1.5.1 Structure Algébrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice: Montrer que pour tout i, j, k, ℓ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$

Proposition 21.1.9 $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau



Démonstration

- **$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien :**

Ceci a été démontré puisque $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- **" $\times$ " est lci associative**

C'est une lci car le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est encore dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, et de plus on a vu que cette loi est associative

- **I_n est élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$AI_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \times (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$I_n A = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \times (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

- **$\times$ est distributive par rapport à $+$**

C'est la bilinéarité de $\times$ déjà prouvée



Remarque: pour $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 21.1.10 l'application Θ qui à tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ associe la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}_{i\text{-ème coordonnée}}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right)$$

est un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelé isomorphisme canonique.

En particulier :

Si f et g sont canoniquement associées aux matrices A et B respectivement, Alors :

$$g \circ f \text{ est canoniquement associé à } BA$$



Démonstration • On sait déjà qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espace vectoriel. et donc en particulier un isomorphisme de groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ dans $(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n), +)$

• Montrons que $\Theta(Id_{\mathbb{K}^n}) = I_n$

Notons $f = \Theta^{-1}(I_n)$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n \delta_{1j} x_j, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j}_{i\text{-ème coordonnée}}, \dots, \sum_{j=1}^n \delta_{nj} x_j \right) = (x_1, \dots, x_n)$$

Donc $\Theta^{-1}(I_n) = f = Id_{\mathbb{K}^n}$, et donc $\Theta(Id_{\mathbb{K}^n}) = I_n$

• Calculons l'image d'un produit.

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associées à A et B respectivement.

$$A = \Theta(f) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad B = \Theta(g) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$g \circ f(x_1, \dots, x_n) = g\left(\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j}_{y_1}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}_{y_k}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{nj} x_j}_{y_n}\right)$$

Or

$$g(y_1, \dots, y_n) = \left(\sum_{k=1}^n b_{1k} y_k \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n b_{1k} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{1k} a_{kj} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_{1k} a_{kj} \right)}_{c_{1j}} x_j \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Donc

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad g \circ f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n c_{1j} x_j, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j}_{i\text{-ème coordonnée}}, \dots, \sum_{j=1}^n c_{nj} x_j \right)$$

Or

$$BA = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{donc} \quad \Theta(g \circ f) = BA = \Theta(g) \times \Theta(f)$$

•

21.1.5.2 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 21.1.6 On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \implies m_{ij} = 0$$

$$M \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j \implies m_{ij} = 0$$

♠

Remarque: les matrices $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ s'écrivent sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdot & * \end{pmatrix}$$

Remarque: $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff {}^tM \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

Définition 21.1.7 On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies d_{ij} = 0$$

On note parfois $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$ 

Remarque: $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

En particulier les matrices D de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ s'écrivent sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Exercice: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les matrices colonnes sont $C_1, \dots, C_n$ et les matrices lignes sont $L_1, \dots, L_n$. On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Montrer que

$$AD = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 C_1 & \cdots & \lambda_j C_j & \cdots & \lambda_n C_n \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 L_1 \\ \vdots \\ \lambda_i L_i \\ \vdots \\ \lambda_n L_n \end{pmatrix}$$

Proposition 21.1.11

$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 

Démonstration

- Montrons que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car contient I_n) Soient A, B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et λ, μ deux scalaires.

Notons $\lambda A + \mu B = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \implies m_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij} = 0$$

Donc $\lambda A + \mu B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- Montrons que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Nous savons déjà que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant I_n . Montrons qu'il est stable par produit.

Soient A, B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ Notons $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \implies c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{i \leq k} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_0 + \sum_{i > k} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_0 = 0$$

Donc $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- ★ Montrons que $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel (resp. un sous-anneau) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est l'image de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par la transposition qui est un morphisme d'espace vectoriel, c'est donc un

$\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cet ensemble contient I_n et est stable par produit car :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})^2, \quad {}^t(AB) = \underbrace{{}^tB}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \underbrace{{}^tA}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est donc un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

★ Montrons que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel (resp. un sous-anneau) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En effet $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'intersection de deux $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel (resp. sous-anneaux) car

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

•

21.1.5.3 Matrices inversibles

Définition 21.1.8 On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{K})$, on note M^{-1} la matrice inverse de M

♠

Proposition 21.1.12 ($GL_n(\mathbb{K}), \times$) est un groupe.
l'isomorphisme canonique Θ induit un **isomorphisme de groupes** entre $GL(\mathbb{K}^n)$ et $GL_n(\mathbb{K})$.
En Particulier :
Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$f \in GL(\mathbb{K}^n) \iff M \in GL_n(\mathbb{K})$$

Et dans le cas inversible, on a

$$f^{-1} \text{ est canoniquement associé à } M^{-1}$$

♣

Démonstration On sait que les éléments inversibles d'un anneau forment un **groupe**. En effet ici. $\times$ est associative, I_n est élément neutre et tout élément de $GL_n(\mathbb{K})$ admet un inverse.

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, en notant $M = \Theta(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associé On a a grâce à l'isomorphisme $\Theta : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} f \in GL(\mathbb{K}^n) &\iff \exists h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n); & f \circ h = h \circ f = Id_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff \exists h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n); & \Theta(f \circ h) = \Theta(h \circ f) = \Theta(Id_{\mathbb{K}^n}) \\ &\iff \exists h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n); & \Theta(f)\Theta(h) = \Theta(h)\Theta(f) = I_n \\ &\iff \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); & MN = NM = I_n \\ &\iff & M \in GL_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

On en déduit que la bijection Θ induit une bijection de $GL(\mathbb{K}^n)$ sur son **image** $GL_n(\mathbb{K})$.

Cette bijection induite étant un **isomorphisme de groupes** (car bijective et morphisme de groupes) :
Pour f quelconque dans $GL(\mathbb{K}^n)$ et M sa matrice associée

$$\Theta(f^{-1}) = \Theta(f)^{-1} = M^{-1}$$

Et donc f^{-1} est canoniquement associé à M^{-1}

•

Proposition 21.1.13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 A est inversible si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0$$

♣

Démonstration Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A .

A est inversible	si et seulement si	f est un automorphisme
	si et seulement si	f est injective
	si et seulement si	$\forall x \in \mathbb{K}^n, f(x) = 0 \implies x = 0$
	si et seulement si	$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0 \implies X = 0$

•

Exercice: Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & \pi \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

Proposition 21.1.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible
- (ii) A admet un inverse à gauche (il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tel que $BA = I_n$)
- (iii) A admet un inverse à droite (il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tel que $AC = I_n$)

Dans le cas où (ii) est vrai, on a $B = A^{-1}$

Dans le cas où (iii) est vrai, on a $C = A^{-1}$

♣

Démonstration Etant donné l'isomorphisme canonique Θ :

$$(i) \iff \underbrace{f \text{ est un automorphisme}}_{(1)}$$

$$(ii) \iff \underbrace{f \text{ admet un inverse à gauche}}_{(2)}$$

$$(iii) \iff \underbrace{f \text{ admet un inverse à droite}}_{(3)}$$

On conclut alors grâce à $(1) \iff (2) \iff (3)$ En fin dans le cas (ii) (resp. (iii)), on a puisque A inversible :

$$\begin{aligned} BA = I_n &\implies BAA^{-1} = I_n A^{-1} \implies B = A^{-1} \\ \text{resp. } AC = I_n &\implies A^{-1}AC = A^{-1}I_n \implies C = A^{-1} \end{aligned}$$

•

Exercice: Donner une CNS pour que $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit inversible. Quelle est alors son inverse ?

Corollaire 21.1.15 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$$

Et dans le cas inversible on a

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

♣

Démonstration

• Supposons A inversible.

On a $AA^{-1} = I_n$ et donc

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

D'où d'après ce qui précède tA est inversible et

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

- Supposons tA inversible.

En appliquant ce qui précède à tA , on trouve que

$$A = {}^t({}^tA) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

•

Exercice: Que dire de l'invisibilité de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & \pi \end{pmatrix}$$

21.1.5.4 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 21.1.9

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} = a_{ji} \\ A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) & \quad \text{si et seulement si} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} = -a_{ji} \end{aligned}$$

♠

Remarque: les coefficients d'une matrice symétrique sont symétriques par rapport à la diagonale principale²

Remarque: les coefficients des matrices antisymétriques sont tous nuls.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 5 & 12 \\ 1+i & 12 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 8 \\ \sqrt{2} & -8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

Remarque 21.1.5 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA = A \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA = -A$$

*

Proposition 21.1.16

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

♣

Démonstration puisque la transposition τ est involutive, c'est une symétrie : la symétrie par rapport à $\ker(\tau - Id)$ parallèlement à $\ker(\tau + Id)$ et en particulier

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \ker(\tau - Id) \oplus \ker(\tau + Id) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

•

Remarque: On a la décomposition de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ relative à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$$M = \underbrace{\frac{M + {}^tM}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{M - {}^tM}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

21.2 Matrices et Applications Linéaires

Voir Fiche 12

²coefficients dont l'indice de la ligne est égal à celui de l'indice de la colonne

21.2.1 Matrices Rectangulaires et Morphismes

Dans cette section E, F, G désignent trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels munis de bases respectives

$$\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_p) \quad \mathcal{C} := (f_1, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{G} := (g_1, \dots, g_q)$$

21.2.1.1 Matrice et Famille de vecteurs

- Soit x un vecteur de E , en notant $x = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k$ la décomposition de x relativement à $\mathcal{B}$, on définit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

Exemple: On pose $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{p-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, alors pour $P := 3X + 2X^2 + 7X^{p-1}$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

- Soit $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_q)$ une famille de q vecteurs de E . On définit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_q) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pj} & \cdots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

Où pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{pj} \end{pmatrix}$

Exemple: On note $Q := -X$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,2}(\mathbb{K})$$

21.2.1.2 Matrices et formes linéaires

- Soit $\omega \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ caractérisée par la famille de coefficients³ $(\beta_1, \dots, \beta_p)$:

Pour tout vecteur x , et sa décomposition relative à $\mathcal{B}$ $x = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k$, on a $\omega(x) = \sum_{k=1}^p \beta_k \alpha_k$

on définit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$$

En notant $\mathcal{D}: \mathbb{K}_1[X] \rightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire dérivation (où on a identifié $\mathbb{K}_0[X]$ et $\mathbb{K}$), on a : Pour tout $P = aX + b$, on a $\mathcal{D}(P) = a$, donc relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\mathcal{F} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ une famille de n vecteurs de E . On définit³ il s'agit des coordonnées de ω relativement à la base duale de $\mathcal{B}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \beta_{ij} & \cdots & \beta_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & \beta_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega_i) = \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \cdots & \beta_{ip} \end{pmatrix}$

21.2.1.3 Matrice et Application linéaire

- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Où pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_j)) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

Remarque: Un moyen mnémotechnique pour retrouver $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ est de construire le tableau des coefficients $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi)$ associé au diagramme

$$(F, \mathcal{C}) \xleftarrow{\varphi} (E, \mathcal{B})$$

Remarque: $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi(\mathcal{B})}$ ou de façon mnémotechnique $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi(\mathcal{B})$

Exemple: En notant $\mathcal{D}: \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]$ l'application dérivation, en notant $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ et $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ les bases canoniques respectives.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n, n+1}(\mathbb{K})$$

21.2.1.4 Action d'un Morphisme sur un vecteur

- Soit $\omega \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on note $L := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$, et $x \in E$, on note $X := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$:

$$\boxed{\omega(x) = LX}$$

Où l'on a identifié $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$,

Exemple: En reprenant l'exemple de la forme linéaire $\mathcal{D}: \mathbb{K}_1[X] \rightarrow \mathbb{K}$, on a pour $P = aX + b$

$$\mathcal{D}(P) = a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

- Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$ on note

$$M := \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \quad X := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{et} \quad Y := \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$$

$$\boxed{y = \varphi(x) \iff Y = MX}$$

Remarque: Ceci traduit l'égalité $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ où de façon mnémotechnique

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Remarque: Cette formule généralise la précédente puisque $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, 1}(\omega)$

Remarque: Dans le cas d'une famille finie $\mathcal{L}$ de vecteurs de E , on a

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi(\mathcal{L}) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})}$$

Où de façon mnémotechnique $\text{Mat}_{\mathcal{C}} \varphi(\mathcal{L}) = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$

Démonstration On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_q)$ les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ d'après les propriétés algébriques des matrices

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) = \left(\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1)}_{\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(x_1))} \cdots \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_q)}_{\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(x_q))} \right)$$

•

21.2.1.5 Opérations entre Morphismes

Proposition 21.2.1

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel :
Pour tout φ, ψ dans $\mathcal{L}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi + \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$$

♣

Démonstration Puisque toute forme linéaire est entièrement caractérisée par son tableau (image de la base $\mathcal{B}$ exprimée à l'aide de ses coordonnées relativement à $\mathcal{C}$), on en déduit la bijectivité.

Enfin la linéarité se démontre à l'aide des opérations sur les colonnes d'une matrice

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi + \psi) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1) + \psi(e_1), \dots, \varphi(e_p) + \psi(e_p)) \\ &= \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1)) + \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi(e_1)) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_p)) + \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi(e_p)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1)) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_p)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi(e_1)) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi(e_p)) \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi) \\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda \cdot \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\lambda \cdot \varphi(e_1), \dots, \lambda \cdot \varphi(e_p)) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1)) & \cdots & \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_p)) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1)) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(e_p)) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \end{aligned}$$

•

Corollaire 21.2.2

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

♣

Proposition 21.2.3 On a par ailleurs une compatibilité entre le produit matriciel et la composition de morphismes linéaires :
Pour tout $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{G}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)}$$

♣

Remarque 21.2.1 Un moyen mnémotechnique de retenir cette formule est de considérer l'égalité

$$\text{Mat}_{\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{C}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$$

associée aux diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} (G, \mathcal{G}) & \xleftarrow{g} & (F, \mathcal{C}) & \xleftarrow{f} & (E, \mathcal{B}) \\ & & \searrow & \swarrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

*

Démonstration

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{G}}(g \circ f(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{G}}(g(f(\mathcal{B}))) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{G}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{G}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

•

21.2.2 Matrices Carrées et Endomorphismes

Dans cette section on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base

$$\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$$

Soit $\varphi \in \text{End}(E)$, on définit

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})}$$

Proposition 21.2.4 *L'application*

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}} : \text{End}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel et un isomorphisme d'anneau.

*Cette isomorphisme induit un **isomorphisme de groupes** entre $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ et $(\text{Aut}(E), \circ)$*

♣

Remarque 21.2.2 *Plus précisément, pour tout φ dans $\text{End}(E)$, si on pose $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ on a*

$$M \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \varphi \in \text{Aut}(E)$$

Et dans le cas inversible

$$\boxed{M^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1})}$$

*

Démonstration

- On sait déjà que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un morphisme d'espace vectoriel.
- On en déduit $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un morphisme d'anneaux.

car c'est déjà un morphisme de groupe pour la loi $+$, et pour tout f, g dans $\mathcal{L}(E)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$$

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ induit un **isomorphisme de groupes** entre $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ et $(\text{Aut}(E), \circ)$

De plus $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un morp

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, en notant $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On a à grâce à l'isomorphisme d'anneaux $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} f \in GL(E) &\iff \exists h \in \mathcal{L}(E); & f \circ h = h \circ f = Id_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff \exists h \in \mathcal{L}(E); & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) \\ &\iff \exists h \in \mathcal{L}(E); & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n \\ &\iff \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); & MN = NM = I_n \\ &\iff & M \in GL_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

On en déduit que la bijection $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ induit une bijection de $GL(E)$ sur son image $GL_n(\mathbb{K})$.

Cette bijection induite $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ étant un **isomorphisme de groupes** (car bijective et morphisme de groupes) :

Pour f quelconque dans $GL(E)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice associée

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = M^{-1}$$

Et donc f^{-1} est canoniquement associé à M^{-1}

•

21.2.3 Matrices de Passage et Isomorphismes

Dans cette section on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni de deux bases

$$\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' := (e'_1, \dots, e'_n)$$

On appellera la première l'ancienne base et la deuxième la nouvelle

Définition 21.2.1 On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on la note P .

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ième colonne de P est constituée des coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ du j -ième vecteur e'_j de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ ♠

Exemple: on munit $\mathcal{E}$ de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de la base $\mathcal{B}' = (\underbrace{\vec{i}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{j} + 2\vec{i}}_{\vec{v}}, \underbrace{\vec{k} + 2\vec{j} - 5\vec{i}}_{\vec{w}})$

(c'est bien une base puisqu'échelonne par rapport à la première)

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque: $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$ où de façon mnémotechnique

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(Id_E) \quad \text{associé à} \quad (E, \mathcal{B}) \xleftarrow{Id_E} (E, \mathcal{B}')$$

Proposition 21.2.5 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est une matrice de passage Alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$

En particulier⁴

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

♣

Démonstration

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \times P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(Id_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(Id_E) = I_n$$

•

Exemple: Quels que soient (x, y, z) et (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$ en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

$$\begin{aligned} f^{-1}(a, b, c) = (x, y, z) &\iff f(x, y, z) = (a, b, c) \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - 5z = a \\ y + 2z = b \\ z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - 2b + 9c = x \\ b - 2c = y \\ c = z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁴on a en fait une équivalence :

Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ Alors P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base obtenue à partir des colonnes de P

Donc puisque f^{-1} est canoniquement associé à $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}$:

$$P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier grâce à la deuxième colonne de cette matrice on a

$$\vec{j} = -2\vec{u} + \vec{v}$$

21.2.3.1 Application aux vecteurs

Soit x un vecteur de E , on note X (resp. X') le vecteur colonne de ses coordonnées dans l'ancienne (resp. nouvelle) base et P la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base

$$X := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad X' := \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) \quad \text{et} \quad P := P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

On a alors⁵

$$X = PX'$$

Remarque: Un moyen mnémotechnique pour retrouver cette formule est liée à l'identité

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} \text{Id}_E(x) = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{Id}_E}_{P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

de construire le tableau des coefficients $\text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi)$ associé au diagramme

$$(F, \mathcal{C}) \xleftarrow{\varphi} (E, \mathcal{B})$$

Exemple: Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ dans l'ancienne base sont données par la matrice colonne

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

Remarque: Pour une famille finie $\mathcal{L}$ de vecteurs de E , en posant pose $L := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ et $L' := \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{L})$, on a $L = PL'$

21.2.3.2 Application aux morphismes

On se donne ici un espace vectoriel F muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

Proposition 21.2.6 (Cas des formes linéaires)

Pour $\omega \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ en notant Ω (resp. Ω') la matrice représentant ω dans l'ancienne (resp. nouvelle) base et on notant P la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base de E :

$$\Omega' := \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\omega) \quad \Omega := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \quad \text{et} \quad P := P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$\Omega' = \Omega P$$

♣

Remarque: Un moyen mnémotechnique pour retrouver cette formule est liée à l'identité

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\omega) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} \omega \circ \text{Id}_E = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{Id}_E}_{P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

associée aux diagrammes $(\mathbb{K}, 1) \xleftarrow{\omega} (E, \mathcal{B}) \xleftarrow{\text{Id}_E} (E, \mathcal{B}')$

Proposition 21.2.7 (Cas des applications linéaires)

Pour $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ en notant A (resp. A') la matrice représentant φ dans les anciennes (resp. nouvelles) bases et on notant P (resp. Q) la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base de E (resp. de F) :

$$A' := \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\varphi) \quad A := \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \quad \text{et} \quad P := P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \quad Q := P(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

⁵On dit que la formule de changement de coordonnées est contravariante

$$A' = Q^{-1}AP$$

♣

Remarque: Ceci équivaut à $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\varphi) = P(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) \times P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Ce qui de façon mnémotechnique se retrouve grâce à l'identité

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'}(\varphi) = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}(Id_E)}_{P(\mathcal{C}', \mathcal{C})} \times \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\varphi) \times \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(Id_E)}_{P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

associée au diagramme

$$(F, \mathcal{C}') \xleftarrow{Id_F} (F, \mathcal{C}) \xleftarrow{\varphi} (E, \mathcal{B}) \xleftarrow{Id_E} (E, \mathcal{B}')$$

φ

21.2.3.3 Application aux endomorphismes

Proposition 21.2.8 Pour $\varphi \in \text{End}(E)$ en notant M (resp. M') la matrice représentant φ dans les ancienne (resp. nouvelle) base et on notant P la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base de E :

$$M' := \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \quad M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \quad \text{et} \quad P := P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$M' = P^{-1}MP$$

♣

Remarque: Ceci équivaut à $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Exemple: Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ défini par

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i}, \quad \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En particulier grâce à la troisième colonne on voit que

$$\varphi(\vec{w}) = -5\vec{u} - \vec{w}$$

21.3 Rang d'une matrice

21.3.1 Définition et Propriétés

Définition 21.3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A , et on note $\text{rg}(A)$, le rang des colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$

$$A = (C_1 \quad \dots \quad C_p) \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

♠

Exemple:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{rg} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 2$$

Car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires

Remarque 21.3.1 Si on note $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A , on a alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi)$$

*

Preuve En notant $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on a

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \text{rg}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) = \text{rg}(\varphi)$$

•

Exemple: Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par $\varphi : (x, y, z) \mapsto (4z, 5z, y + z, y + z)$

$$\text{rg}(\varphi) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Remarque: $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\text{rg}(A) = n$

Proposition 21.3.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

$$\text{rg}(AP) = \text{rg}(A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(QA) = \text{rg}(A)$$

♣

Démonstration En notant φ, f, g canoniquement associés à A, P, Q on a d'après l'invariance du rang par composition avec isomorphisme (en effet f et g sont des isomorphismes).

$$\text{rg}(QA) = \text{rg}(g \circ \varphi) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(AP) = \text{rg}(\varphi \circ f) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A)$$

•

Proposition 21.3.2 Soit $y_1, \dots, y_p$ une famille de vecteurs de F . Où F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C}$.

En notant $M := \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1, \dots, y_p)$, on a

$$\text{rg}(y_1, \dots, y_p) = \text{rg}(M)$$

♣

Démonstration On note $\theta : \mathbb{K}^n \rightarrow F$ l'isomorphisme relatif à $\mathcal{C} := (e_1, \dots, e_n)$

$$\theta : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de M , vues comme vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Soit $X \in \mathbb{K}^n$ quelconque et $x = \theta(X)$

$$\begin{aligned} X \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) &\iff \exists (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p, \quad X = \mu_1 C_1 + \dots + \mu_p C_p \\ &\iff \exists (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \theta(X) = \theta(\mu_1 C_1 + \dots + \mu_p C_p) \\ &\iff \exists (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p, \quad x = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p \\ &\iff x \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_p) \end{aligned}$$

D'où θ induit un isomorphisme entre $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ et $\text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$, et donc

$$\dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$$

CQFD

•

Remarque: Autrement dit le rang d'une matrice A est égale au rang de n'importe quelle famille de vecteurs représentés par les colonnes de A

Exemple: En passant par les coordonnées relatives à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\text{rg}(0, X^2 + X^3, 4 + 5X + X^2 + X^3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Proposition 21.3.3 Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. En notant $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$, on a

$$\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(M)$$

♣

Démonstration Il suffit d'appliquer ce qui précède à la famille $\varphi(\mathcal{B})$. Puisque $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(\mathcal{B}))$

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi(\mathcal{B})) = \text{rg}(\varphi)$$

•

Remarque: Autrement dit le rang d'une matrice est égale au rang de n'importe quelle application linéaire qui la représente.

Proposition 21.3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \end{array} \right)$$

Alors $\text{rg}(A)$ est le nombre de coefficients non nuls de la diagonale.

♣

Démonstration En notant r la taille du premier bloc on voit que $C_1, \dots, C_r$ est une famille échelonnée de vecteurs relativement aux r premiers vecteurs $e_1, \dots, e_r$ de la base canonique donc libre, et on voit que $C_{r+1}, \dots, C_p$ sont dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_r)$. donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_r, C_{r+1}, \dots, C_p) = \text{rg}(C_1, \dots, C_r) = r$$

•

Remarque: On peut généraliser ce résultat au cas où les 1 de la diagonale sont remplacés par des coefficients non nuls (quitte à multiplier à gauche par une matrice diagonale à coefficients non nuls)

21.3.2 Methode du Pivot de Gauss

Définition 21.3.2 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ On appelle opérations élémentaires sur les lignes de A les opérations suivantes :

1. Echange des lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Dilatation de la ligne i par un scalaire non nul λ : $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$
3. Ajout à la ligne i , la ligne j (avec $j \neq i$) dilatée d'un rapport λ : $L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j$

♠

Remarque 21.3.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. Par échange des lignes i et j de A , on obtient $A' = \mathcal{P}(i, j)A$ où

$$\mathcal{P}(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & \downarrow^j & \\ & & & & 1 & i \\ & & & & & \leftarrow \\ & \xrightarrow{j} & 1 & & 0 & \\ & & \uparrow_i & & & \ddots \\ & & & & & & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix}$$

2. Par dilatation de la ligne i par un scalaire non nul λ , on obtient $A' = \mathcal{D}(\lambda, i)A$ où

$$\mathcal{D}(\lambda, i) \stackrel{\text{def}}{=} I_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \downarrow & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \leftarrow & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3. Par ajout à la ligne i , la ligne j (avec $j \neq i$) dilatée d'un rapport λ , on obtient $A' = \mathcal{T}(i, \lambda, j)A$ où

$$\mathcal{T}(i, \lambda, j) \stackrel{\text{def}}{=} I_n + \lambda E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \downarrow & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \leftarrow & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Par des opérations inverses on voit que ces matrices sont dans $GL_n(\mathbb{K})$ et que

$$\mathcal{P}(i, j)^{-1} = \mathcal{P}(i, j), \quad \mathcal{D}(\lambda, i)^{-1} = \mathcal{D}\left(\frac{1}{\lambda}, i\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(i, \lambda, j)^{-1} = \mathcal{T}(i, -\lambda, j)$$

*

Remarque 21.3.3 les **opérations** analogues sont également possibles **sur les colonnes**, elles s'obtiennent par **multiplication à droite** de la matrice de départ par une des matrices de $GL_p(\mathbb{K})$ vues ci-dessus. *

Proposition 21.3.5 une succession finie d'opérations élémentaires d'opérations sur les lignes et colonnes de la matrice A , ne change pas le rang de A ♣

Démonstration Cette succession finie d'opérations élémentaires revient à multiplier à gauche et à droite la matrice A par des matrices de permutation, dilatation ou transvection qui sont inversibles : donc le rang est invariant. •

Pivot_Gauss :=procédure(A)

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour j allant de 1 à $\min(n, p)$ **faire**

. **Si** possible **Alors** :
. • **Faire** $C_j \longleftrightarrow C_k$ avec $k \geq j$ afin d'obtenir :
. les coefficients $a_{jj}, a_{j+1,j}, \dots, a_{nj}$ de C_j non tous nuls
. • **Faire** $L_j \longleftrightarrow L_r$ avec $r \geq j$ afin d'obtenir $a_{jj} \neq 0$ (c'est le **pivot**)
. **sinon** : sortir de la boucle.
. **Fin du si**

. $L_j \longleftarrow \frac{1}{a_{jj}} L_j$

Pour i allant de $j+1$ à n **faire** $L_i \longleftarrow L_i - a_{ij} L_j$ **Fin du Pour**

Fin du Pour

Fin de la procédure

En appliquant cet algorithme à une matrice A , on obtient une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

Exemple: En appliquant l'algorithme de Gauss à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

on obtient

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (C_1 \leftrightarrow C_2) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (C_2 \leftrightarrow C_3) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \\ &= && 2 \end{aligned}$$

Remarque: En ne pratiquant pas les permutations sur les colonnes, quitte à ne pas modifier les colonnes sans pivot, on peut obtenir une matrice pseudo-triangulaire

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & * \end{array} \right)$$