

Table des matières

22 Systèmes Linéaires et Déterminants	3
22.1 Systèmes linéaires	3
22.1.1 Définition et interprétations	3
22.1.2 Interprétations	3
22.1.3 Résolutions	4
22.1.3.1 Cas inversible	4
22.1.3.2 Cas général	6
22.2 Déterminants d'ordre 2 ou 3	6
22.2.1 Cas de la dimension 2	7
22.2.2 Cas de la dimension 3	8
22.2.3 Applications	9
22.2.3.1 Déterminant et Bases	10
22.2.3.2 Déterminant et Endomorphismes	11
22.2.3.3 Déterminant et Matrices	12
22.2.3.4 Déterminant et Systèmes	14

Chapitre 22

Systèmes Linéaires et Déterminants

Dans tout ce chapitre on se place dans le corps $\mathbb{K}$ qui désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

22.1 Systèmes linéaires

22.1.1 Définition et interprétations

Définition 22.1.1 On appelle système linéaire à n équations p inconnues $x_1, \dots, x_p$ tout système d'équations du type.

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

où $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (appelée matrice associée) et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ sont n constantes fixées (formant le second membre).

Résoudre (S) c'est trouver l'ensemble des p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}$ vérifiant (S) . ♠

Dans la suite, sauf mention du contraire (S) désigne le système ci-dessus.

Définition 22.1.2 (Rang d'un système) On appelle rang du système (S) le rang de la matrice associée (A) ♠

Définition 22.1.3 (Système homogène associé) On appelle système homogène (S_0) associé à (S) , le système

$$(S_0) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

♠

22.1.2 Interprétations

Remarque 22.1.1 (Interprétation Matricielle) En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne canoniquement associée au second membre de (S) , on a :

Quel que soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ (avec X sa matrice colonne associée)

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } (S) \iff AX = Y$$

*

Corollaire 22.1.1 Si $\text{rg}(S) = p$ (i.e. A injective) **Alors** (S) admet au plus une solution

Si $\text{rg}(S) = n$ (i.e. A surjective) **Alors** (S) admet au moins une solution



Proposition 22.1.2 (Structure de l'ensemble des solutions) l'ensemble des solutions de (S) est soit vide (on dit alors que le système est incompatible) soit un sous-espace affine de la forme

$$u_0 + \mathcal{S}_0$$

où u_0 est une solution particulière et $\mathcal{S}_0$ est la direction vectorielle donnée par l'ensemble solution de (S_0)



Remarque 22.1.2 (Interprétation au moyen de vecteurs de $\mathbb{K}^n$) En notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes

de A et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne associée au second membre :

(S) admet une solution si et seulement si $Y \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ (i.e Y est CL de la famille $(C_1, \dots, C_p)$)
Et les solutions sont alors les familles de scalaires de la CL cherchée

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ solution de } (S) \iff Y = \sum_{k=1}^p x_k C_k$$

*

Corollaire 22.1.3 Si $(C_1, \dots, C_p)$ est libre **Alors** (S) admet au plus une solution

Si $(C_1, \dots, C_p)$ est génératrice **Alors** (S) admet au moins une solution



Remarque 22.1.3 (Interprétation au moyen de formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$) En notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $\omega_1, \dots, \omega_n$ les formes linéaires canoniquement associées.

$(x_1, \dots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si

$$\begin{cases} \omega_1(x_1, \dots, x_p) = y_1 \\ \vdots \\ \omega_n(x_1, \dots, x_p) = y_n \end{cases}$$

*

Corollaire 22.1.4 $\mathcal{S}_0$ est l'intersection des n noyaux :

$$\ker \omega_1, \dots, \ker \omega_n$$

En particulier sa dimension et bases sont données par l'étude du noyau de A



Remarque 22.1.4 (Interprétation au moyen d'applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A .

$(x_1, \dots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si $f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$

*

Exercice: Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (autre que $\mathbb{K}^n$) est l'intersection d'au plus n hyperplans.

C'est le noyau d'un projecteur, donc cf interprétation formes linéaires

22.1.3 Résolutions

22.1.3.1 Cas inversible

Proposition 22.1.5 (Systèmes de CRAMER)

le système (S) admet une et une seule solution si et seulement si $r = n = p$.

On dit alors qu'il s'agit d'un système de CRAMER.



Démonstration A l'aide de l'interprétation vectorielle : (S) admet une unique solution
 si et seulement si $(C_1, \dots, C_p)$ est une base de $\mathbb{K}^n$
 si et seulement si $(C_1, \dots, C_p)$ libre et générateur
 si et seulement si $\text{rg}(C_1, \dots, C_p) = p$ et $\text{rg}(C_1, \dots, C_p) = n$
 si et seulement si $r = n = p$ •

Proposition 22.1.6 Tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

avec $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tous non nuls, est un système de CRAMER. ♣

Démonstration la matrice associée étant triangulaire supérieure à diagonale non nulle, il est clair que ce système est de CRAMER.

Dans la pratique on trouve la valeur successivement et de proche en proche de x_n , puis de $x_{n-1}, \dots$, puis enfin de x_1 •

Exercice: Résoudre

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = u \\ x_2 - 4x_3 = v \\ x_3 = w \end{cases}$$

Proposition 22.1.7 Deux systèmes sont équivalents lorsque l'on permute deux lignes ($L_i \longleftrightarrow L_j$), que l'on dilate une ligne ($L_i \leftarrow \lambda L_i$) par un facteur non nul ou lorsque l'on ajoute à une ligne le multiple d'une **autre** ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$) ♣

Proposition 22.1.8

Par application l'algorithme de Gauss, ne faisant que des opérations élémentaires sur les lignes, on trouve : Tout système de CRAMER est équivalent à un système de CRAMER triangulaire. ♣

Exercice: Appliquer le pivot de Gauss au système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 - 3x_2 = y_2 \\ x_2 + 4x_3 = y_3 \end{cases}$$

Proposition 22.1.9 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• A est inversible si et seulement si

Quel que soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ le système

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

admet une unique solution $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$

• Dans le cas inversible, l'unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit

$$(S_{inv}) \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

où $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ♣

Démonstration Soit f canoniquement associé à A

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff f \text{ inversible} \\ &\iff \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p; f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n) \\ &\iff \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, (S) \text{ admet une unique solution } (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \end{aligned}$$

Dans le cas inversible :
 Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque.

On a alors quel que soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$X = A^{-1}Y \iff Y = AX \iff (x_1, \dots, x_p) \text{ est (l'unique) solution de } (S)$$

•

Remarque: En d'autres termes calculer l'inverse d'une matrice revient à résoudre le système linéaire associé à $AX = Y$ et réciproquement.

Exercice: Calculer P^{-1} avec

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

22.1.3.2 Cas général

On note r le rang de (S)

Par application du Pivot de Gauss on obtient un système équivalent (quitte à opérer une permutation sur l'ordre des inconnues que l'on note à l'arrivée $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$)

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_{i_1} & +b_{12}x_{i_2} & \cdots & +b_{1r}x_{i_r} & +b_{1,r+1}x_{i_{r+1}} & \cdots & +b_{1p}x_{i_p} & = & z_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & x_{i_{r-1}} & +b_{r-1,r}x_{i_r} & +b_{r-1,r+1}x_{i_{r+1}} & & +b_{r-1,p}x_{i_p} & = & z_{r-1} \\ & & & x_{i_r} & +b_{r,r+1}x_{i_{r+1}} & \cdots & +b_{rp}x_{i_p} & = & z_r \\ & & & & & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & = & z_n \end{array} \right.$$

- Cas où $r = n$.

(S) admet des solutions qui sont paramétrées par les $p - r$ dernières inconnues

- Cas où $r = p$.

★ (S) n'admet aucune solutions au cas où l'une des $n - r$ dernières équations de compatibilités échoue.

★ (S) admet une seule solution lorsque les $n - r$ dernières équations sont compatibles, il s'agit alors de résoudre un système de **CRAMER** triangulaire.

- Cas où $r < n$ et $r < p$

★ (S) n'admet aucune solution au cas où l'une des $n - r$ dernières équations de compatibilités échoue.

★ (S) admet des solutions paramétrées par les $p - r$ dernières inconnues lorsque les $n - r$ dernières équations sont compatibles

22.2 Déterminants d'ordre 2 ou 3

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n = 2$ ou $n = 3$

Définition 22.2.1 Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$

• On dit que φ est une forme multilinéaire (bilinéaire dans le cas $n = 2$, trilinéaire dans le cas $n = 3$) lorsqu'elle linéaire par rapport à chacune de ses composantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}, \quad \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

- On dit que φ est alternée lorsqu'elle s'annule quand deux de ses composantes sont les mêmes

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad (x_i = x_j \text{ et } i \neq j) \implies \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- On dit que φ est antisymétrique lorsqu'elle change de signe par permutation de deux de ses composantes

$$\forall (i, j)^2 \in \llbracket 1, n \rrbracket^n, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \\ i \neq j \implies \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i\text{-eme position}}, \dots, \underbrace{x_j}_{j\text{-eme position}}, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i\text{-eme position}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j\text{-eme position}}, \dots, x_n)$$

♠

Exercice: Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire, montrer que

$$\varphi \text{ alternée} \iff \varphi \text{ antisymétrique}$$

22.2.1 Cas de la dimension 2

On munit E d'une base $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$

Définition 22.2.2

On appelle *déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$* la forme bilinéaire alternée sur E définie par :

Pour tout u_1, u_2 dans E dont la décomposition relativement à $\mathcal{B}$ est $u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2$ et $u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

♠

Démonstration Pour $u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2$, $u'_1 = x'_1 e_1 + y'_1 e_2$ et $u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$, et λ, μ deux scalaires

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

D'où le caractère alternée (c'est à dire antisymétrique)

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda u_1 + \mu u'_1, u_2) = \begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x'_1 & x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y'_1 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x'_1 & x_2 \\ y'_1 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u'_1, u_2)$$

D'où le caractère linéaire par rapport à la première composante.

La linéarité par rapport aux autres composantes se démontre de façon analogue (ou encore en invoquant le caractère antisymétrique) •

Exemple: En notant $\mathcal{B} := (1, X)$ la base canonique de $E := \mathbb{R}_1[X]$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(1, 2X + 2) = 2$$

Remarque 22.2.1 $\det_{\mathcal{B}}$ vérifie

- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1$
- $\forall u \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, u) = 0$
- $\forall (u, v) \in E^2, \quad \det_{\mathcal{B}}(v, u) = -\det_{\mathcal{B}}(u, v)$
- $\forall (u, v) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, u + \lambda v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$

i.e. le déterminant de la base vaut 1, et c'est une application alternée et (donc antisymétrique), enfin en ne change pas un déterminant en ajoutant à l'un des vecteurs un multiple de l'autre. *

Remarque: En notant θ l'isomorphisme entre E et $\vec{\mathcal{P}}$ caractérisé par

$$\theta(e_1) = \vec{i} \quad \text{et} \quad \theta(e_2) = \vec{j}$$

où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{P}}$

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, v) = \text{Det}(\theta(u), \theta(v))$$

où Det est le déterminant du plan $\vec{\mathcal{P}}$ relatif à la bond $(\vec{i}, \vec{j})$

Proposition 22.2.1 Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire alternée on a alors

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

♣

Démonstration Soient u_1, u_2 dans E , avec les notations habituelles on a en développant par multilinéarité,

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2) &= \varphi(x_1 e_1 + y_1 e_2, x_2 e_1 + y_2 e_2) \\ &= x_1 x_2 \varphi(e_1, e_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) \\ &\quad + y_1 x_2 \varphi(e_2, e_1) + y_1 y_2 \varphi(e_2, e_2) \end{aligned}$$

Or par le caractère alterné (i.e. antisymétrique)

$$\varphi(e_1, e_2) = -\varphi(e_2, e_1) \quad \text{et} \quad \varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = 0$$

Et donc

$$\varphi(u_1, u_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \varphi(e_1, e_2)$$

•

Remarque: En d'autres termes $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme bilinéaire alternée dont l'image de $\mathcal{B}$ est 1

Corollaire 22.2.2 Si $\mathcal{C}$ est une autre base de E .

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

♣

22.2.2 Cas de la dimension 3

On munit E d'une base $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$

Définition 22.2.3

On appelle *déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$* la forme trilinéaire alternée sur E définie par :

Pour tout u_1, u_2, u_3 dans E dont la décomposition relativement à $\mathcal{B}$ est :

$u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3$, $u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3$ et $u_3 = x_3 e_1 + y_3 e_2 + z_3 e_3$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1$$

♠

Démonstration Pour $u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3$, $u'_1 = x'_1 e_1 + y'_1 e_2 + z'_1 e_3$, $u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3$ et $u_3 = x_3 e_1 + y_3 e_2 + z_3 e_3$, et λ, μ deux scalaires

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_1, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_3 \\ z_1 & z_1 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

De façon analogue on montre que dans tous les cas : deux composantes identiques annulent le déterminant. D'où le caractère alterné (c'est à dire antisymétrique)

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\lambda u_1 + \mu u'_1, u_2, u_3) &= \begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x'_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda y_1 + \mu y'_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda z_1 + \mu z'_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x'_1 & x_2 & x_3 \\ y'_1 & y_2 & y_3 \\ z'_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) + \mu \det_{\mathcal{B}}(u'_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

D'où le caractère linéaire par rapport à la première composante.

La linéarité par rapport aux autres composantes se démontre de façon analogue (ou encore en invoquant le caractère antisymétrique)

•

Exemple: En notant $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ la base canonique de $E := \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(1, 2X + 2, 3X^2 + 7X + 5) = 6$$

Remarque 22.2.2 $\det_{\mathcal{B}}$ vérifie

- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$
- $\forall u \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, u, v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, u) = \det_{\mathcal{B}}(v, u, u) = 0$
- $\forall (u, v, w) \in E^3, \quad \det_{\mathcal{B}}(v, u, w) = -\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \dots$ et analogues
- $\forall (u, v, w) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, v, w + \lambda u + \mu v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \dots$ et analogues

i.e. le déterminant de la base vaut 1, et c'est une application alternée et (donc antisymétrique), enfin en ne change pas un déterminant en ajoutant à l'un des vecteurs une CL des autres. *

Remarque: En notant θ l'isomorphisme entre E et $\vec{\mathcal{E}}$ caractérisé par

$$\theta(e_1) = \vec{i} \quad \theta(e_2) = \vec{j} \quad \text{et} \quad \theta(e_3) = \vec{k}$$

où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une b.o.n.d. de $\vec{\mathcal{E}}$

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \text{Det}(\theta(u), \theta(v), \theta(w))$$

où Det est le déterminant de $\vec{\mathcal{E}}$ relatif à la b.o.n.d. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Proposition 22.2.3 Soit $\varphi : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$ trilinéaire alternée on a alors

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, e_3) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$



Démonstration Soient u_1, u_2, u_3 dans E , avec les notations habituelles on a en développant par multilinéarité, et ne gardant que les termes faisant intervenir les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, u_3) &= \varphi(x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3, x_3 e_1 + y_3 e_2 + z_3 e_3) \\ &= x_1 y_2 z_3 \varphi(e_1, e_2, e_3) + z_1 x_2 y_3 \varphi(e_3, e_1, e_2) + y_1 z_2 x_3 \varphi(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + x_1 z_2 y_3 \varphi(e_1, e_3, e_2) + y_1 x_2 z_3 \varphi(e_2, e_1, e_3) + z_1 y_2 x_3 \varphi(e_3, e_2, e_1) \end{aligned}$$

Or par le caractère alterné (i.e. antisymétrique)

$$\varphi(e_1, e_2, e_3) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_3, e_1)$$

$$\varphi(e_1, e_3, e_2) = \varphi(e_2, e_1, e_3) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

Et donc

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1) \cdot \varphi(e_1, e_2, e_3)$$



Remarque: En d'autres termes $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme trilinéaire alternée dont l'image de $\mathcal{B}$ est 1

Corollaire 22.2.4 Si $\mathcal{C}$ est une autre base de E .

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, e_3) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$



22.2.3 Applications

On munit E d'une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ (rappelons que la dimension n est 2 ou 3)

22.2.3.1 Déterminant et Bases

Proposition 22.2.5 Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E , on a

$$\mathcal{C} \text{ est une base} \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$



Démonstration

• $\implies$.

Si $\mathcal{C}$ est une base on a

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

En particulier

$$1 = \det_{\mathcal{C}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

D'où

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

• $\impliedby$.

Supposons que $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ ne soit pas une base, on en déduit que $\mathcal{C}$ est liée¹.

On peut donc trouver un vecteur de $\mathcal{C}$, qui est CL des autres, mettons :

$$u_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j u_j$$

avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(\lambda_j)_{j \neq k} \in \mathbb{K}^{n-1}$.

D'où puisque ajouter à un vecteur une CL des autres ne change pas le déterminant on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, \underbrace{u_k - \sum_{j \neq k} \lambda_j u_j}_{=0}, \dots, u_n) = 0$$

En effet par multilinéarité le déterminant s'annule dès que l'une de ses composantes est nulle. Ceci prouve l'implication voulue par contraposée.



Définition 22.2.4 . On se place ici dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Orienter l'espace E ($\vec{\mathcal{P}}$ lorsque $n = 2$, $\vec{\mathcal{E}}$ lorsque $n = 3$) c'est choisir une base de référence

$$\mathcal{B}_d = (e_1, \dots, e_n)$$

Toute base $\mathcal{B}$ est dite alors

- **directe** : lorsque $\det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{B}) > 0$
- **indirecte** : lorsque $\det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{B}) < 0$



Remarque: d'après la proposition précédente toute base est soit directe, soit indirecte.

Exemple: Soit $\vec{\mathcal{E}}$ orientée par $\mathcal{B}_d = (e_1, e_2, e_3)$:

- $\mathcal{B}_0$ est directe, et il en va de même pour (e_3, e_1, e_2) et (e_2, e_3, e_1)
- $(e_1, e_3, e_2), (e_3, e_2, e_1)$ et (e_2, e_1, e_3) sont des bases indirectes.

Remarque 22.2.3 Soit E orienté par $\mathcal{B}_d$, notons $(E, \mathcal{B}_d)$.

- pour $\mathcal{C}_d$ une base directe de $(E, \mathcal{B}_d)$ on a quelle que soit la base $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \text{ est directe dans } (E, \mathcal{B}_d) \iff \mathcal{F} \text{ est directe dans } (E, \mathcal{C}_d)$$

- pour $\mathcal{C}_i$ une base indirecte de $(E, \mathcal{B}_d)$ on a quelle que soit la base $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \text{ est directe dans } (E, \mathcal{B}_d) \iff \mathcal{F} \text{ est indirecte dans } (E, \mathcal{C}_i)$$



¹dans le cas contraire on aurait une famille libre de $\dim E$ vecteurs : c'est à dire une base

Démonstration

$$\det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{C}) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$$

donc

$$\det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{F}) \text{ et } \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \text{ de même signe } \iff \det_{\mathcal{B}_d}(\mathcal{C}) > 0 \iff \mathcal{C} \text{ est directe dans } (E, \mathcal{B}_d)$$

•

Remarque: Orienter E ($\vec{\mathcal{P}}$ lorsque $n = 2$, $\vec{\mathcal{E}}$ lorsque $n = 3$), c'est donc choisir parmi les deux catégories de bases possibles, celle qui sera la catégorie des bases directes.

E n'a que deux orientations possibles :

Changer $\mathcal{B}_d$ en une autre base directe ne change pas l'orientation.

Changer $\mathcal{B}_d$ en une autre base indirecte change l'orientation.

22.2.3.2 Déterminant et Endomorphismes

Définition 22.2.5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on appelle $\det(f)$ le scalaire vérifiant

$$\det(f) \stackrel{\text{def}}{=} \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

ce scalaire est indépendant du choix de la base.

♠

Preuve Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une autre base de E .

On pose $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$, φ est une forme n -linéaire alternée, d'où

$$\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n) \cdot \det_{\mathcal{C}}$$

En particulier

$$(*) \quad \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \cdot \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n)$$

Or $\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}$, en particulier

$$(**) \quad \det_{\mathcal{C}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

D'où en comparant (*) et (**), on trouve

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{C}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

•

Remarque 22.2.4

- $\det(\text{Id}_E) = 1$
- $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

*

Proposition 22.2.6 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

♣

Preuve On pose $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$, φ est une forme n -linéaire alternée, d'où

$$\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

•

Proposition 22.2.7 Soient f, g dans $\mathcal{L}(E)$, on a alors

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$$

♣

Démonstration

$$\det(g \circ f) = \det_{\mathcal{B}}(g \circ f(e_1), \dots, g \circ f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_n))) = \det(g) \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))}_{\det(f)}$$

•

Proposition 22.2.8 (Caractérisation des automorphismes) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$$f \in \text{Aut}(E) \iff \det(f) \neq 0$$

Par ailleurs lorsque $f \in \text{Aut}(E)$, on a

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$$

♣

Démonstration

• $\implies$.

Supposons $f \in \text{Aut}(E)$, f admet donc une réciproque f^{-1} et vérifie

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_E$$

D'où en passant au déterminant

$$\det(f) \times \det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(\text{Id}_E) = 1$$

Ce qui prouve d'une part que $\det(f) \neq 0$, et ce qui donne d'autre part la formule :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$$

• $\impliedby$.

$$\begin{aligned} \det(f) \neq 0 &\implies \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0 \\ &\implies (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base} \\ &\implies \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = n \\ &\implies f \in \text{Aut}(E) \end{aligned}$$

•

22.2.3.3 Déterminant et Matrices

Définition 22.2.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A , on définit alors

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\phi)$$

♠

Proposition 22.2.9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_n)$$

♣

Démonstration Avec les notations ci-dessus

$$\det A = \det(\phi) = \det_{\mathcal{B}_0}(\phi(\varepsilon_1), \dots, \phi(\varepsilon_n)) = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_n)$$

où $\mathcal{B}_0 := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

•

Corollaire 22.2.10

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



Remarque: En particulier les règles de calcul : développement selon une ligne, développement selon une colonne, règle de Sarrus... s'appliquent

Exercice: Si A est triangulaire, **Alors** $\det A$ est égal au produit des coefficients diagonaux

Remarque: Toute matrice de transvection est de déterminant 1

Proposition 22.2.11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice relative à la base $\mathcal{B}$, on a alors

$$\det(f) = \det(A)$$



Preuve En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, i.e. les matrices colonnes dont les coefficients sont les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ relativement à $\mathcal{B}$, on trouve

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{vmatrix} = \det(A)$$



Remarque: Cette dernière identité est indépendante du choix de la base

Proposition 22.2.12 Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$



Preuve Soient f, g canoniquement associés à A, B

$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g) = \det(A) \times \det(B)$$



Remarque: Agir par transvections sur les lignes ou les colonnes, ne change pas le déterminant. Ainsi avant de se lancer dans un calcul complexe de déterminant il est plus que souhaitable de simplifier le déterminant par des transvections qui annulent le plus grand nombre de coefficients

Preuve agir par transvections sur une matrice A , c'est multiplier celle-ci par des matrices de transvections $P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q$, or

$$\det(P_1 \dots P_p A Q_1 \dots Q_q) = \det(P_1) \dots \det(P_p) \cdot \det(A) \cdot \det(Q_1) \dots \det(Q_q) = \det(A)$$



Exemple:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Proposition 22.2.13 (Caractérisation du Groupe linéaire) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Par ailleurs lorsque $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

♣

Démonstration Soit ϕ canoniquement associé à A

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \phi \in \text{Aut}(\mathbb{K}^n) \iff \det(\phi) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$$

Et dans le cas inversible, puisque A^{-1} est canoniquement associé à ϕ^{-1}

$$\det(A^{-1}) = \det(\phi^{-1}) = \frac{1}{\det \phi} = \frac{1}{\det A}$$

•

22.2.3.4 Déterminant et Systèmes

Définition 22.2.7 Soit (S) un système à n équations et n inconnues, et A la matrice associée. on appelle déterminant de (S) , le déterminant de la matrice A :

$$\det S \stackrel{\text{def}}{=} \det A$$

♠

Proposition 22.2.14

$$(S) \text{ est de CRAMER} \iff \det S \neq 0$$

♣

Démonstration

$$(S) \text{ est de CRAMER} \iff A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0 \iff \det S \neq 0$$

•

Proposition 22.2.15 (formules de CRAMER) Soit $AX = Y$ l'interprétation matricielle d'un système de CRAMER de matrice A et de second membre Y et d'inconnue

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

les coefficients de X sont alors donnés par les formules de CRAMER

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i est la matrice A où l'on a remplacé la colonne C_i par Y

♣

Démonstration Preuve similaire à celle faite dans les chapitres Géométries

•