Table des matières

Chapitre 23

Espaces Euclidiens et Géométrie Euclidienne

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n (avec $n = 2$ ou $n = 3$)

23.1 Préambule

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ deux vecteurs de E et leurs décompositions relatives à E, on pose :

$$(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

l'application $(\cdot \mid \cdot)$ dépend bien évidemment du choix de la base $\mathcal{B}_0$

Définition 23.1.1 *l'application $(\cdot \mid \cdot)$ définie sur E à valeurs réelles*
• *est une **forme bilinéaire** :*

$$(\star) \qquad \forall (x,y,z) \in E^3, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} (z \mid \lambda x + \mu y) & = & \lambda(z \mid x) + \mu(z \mid y) \\ (\lambda x + \mu y \mid z) & = & \lambda(x \mid z) + \mu(y \mid z) \end{cases}$$

• ***symétrique***

$$(\star\star) \qquad \forall (x,y) \in E^2, \qquad (x \mid y) = (y \mid x)$$

• ***définie positive***

$$(\star\star\star) \qquad \forall x \in E, \qquad (x \mid x) > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

i.e.

$$(\star\star\star)bis \qquad \forall x \in E, \quad (x \mid x) \geq 0 \qquad et \qquad \forall x \in E, \quad (x \mid x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

On résume ces propriétés en disant que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E, et que E, muni de ce produit scalaire est un espace euclidien ♠

Exemple: $\mathbb{R}^n$ peut être muni de sa structure euclidienne canonique

$$\Big((x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n)\Big) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

Définition 23.1.2 *Du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ on en déduit (par positivité de ce dernier) l'application norme $\|\cdot\|$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{(u \mid u)} \end{array}$$

$\|\cdot\|$
- *est **positive** :* $\quad \forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|f\|_2 \geq 0$

- *est* ***définie*** *:* $\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|f\|_2 = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
- *est* ***homogène*** *:* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \|\lambda \cdot f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$
- *vérifie l'****inégalité triangulaire*** *:* $\forall (f,g) \in \mathcal{C}(I)^2, \quad \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

♠

Proposition 23.1.1 *Pour u et v quelconque dans E*

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \\
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2 \\
(u+v|u-v) &= \|u\|^2 - \|v\|^2 \\
(u|v) &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \\
2(\|u\|^2 + \|v\|^2) &= \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2
\end{aligned}$$

♣

Exercice: Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad |(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

☢ Dans toute la suite on considère E espace Euclidien muni de son produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ ☢

Définition 23.1.3 *Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs E.*
On dit que $\mathcal{C}$ est orthogonale lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow (u_i \mid u_j) = 0$$

On dit que $\mathcal{C}$ est orthonormale lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad (u_i \mid u_j) = \delta_{ij}$$

♠

Proposition 23.1.2 **Si** *$\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de n vecteurs* ***tous non nuls*** *de E (en particulier si $\mathcal{F}$ est orthonormale),* **Alors** *$\mathcal{F}$ est une base orthogonale de E* ♣

Démonstration On note $\mathcal{F} := (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

Par produit scalaire on trouve pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$(e_i \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = 0$$

i.e. par bilinéarité

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{(e_i \mid e_k)}_{\delta_{ik}} = 0$$

D'où $\lambda_i(e_i \mid e_i) = 0$ or par le caractère défini positif $(e_i \mid e_i) \neq 0$ puisque $e_i \neq 0$, conclusion $\lambda_i = 0$.
Ainsi $\mathcal{F}$ est une famille libre de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base. •

Proposition 23.1.3 *Pour $x = x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n$ et $y = y_1\epsilon_1 + \ldots + y_n\epsilon_n$ deux vecteurs et leurs décomposition relatives à une base orthonormale*

$$(x \mid y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = {}^tXY$$

où $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$ ♣

Exercice: le prouver

23.2 Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace

23.2.1 Généralités

Définition 23.2.1 (Automorphisme Orthogonal) *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, on dit que φ est un automorphisme orthogonal lorsque φ est un automorphisme de E qui conserve le produit scalaire :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y)$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E ♠

Proposition 23.2.1 *Soit $\varphi : E \to E$ une application (non nécessairement linéaire, ni forcément bijective)*

On a les assertions équivalentes suivantes

(i) $\varphi \in \mathcal{O}(E)$
(ii) $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *et* φ *conserve le produit scalaire :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y)$$

(iii) $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *et* φ *conserve la norme :*

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|$$

♣

Démonstration
$(i) \Longrightarrow (iii)$.
Pour x quelconque dans E

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi(x) \mid \varphi(x))} = \sqrt{(x \mid x)} = \|x\|$$

$(iii) \Longrightarrow (ii)$.
Pour x, y dans E quelconques

$$(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = \frac{1}{4}\left(\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x-y)\|^2\right)$$

Et donc puisque φ conserve la norme

$$(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x \mid y)$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$.
Soit x dans E quelconque, par conservatoin du p.s. et d'après le caractère défini positif, on a

$$x \in \ker\varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow (\varphi(x) \mid \varphi(x)) = 0 \Longleftrightarrow (x \mid x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Et donc $\ker\varphi = \{0\}$, i.e. φ est un endomorphisme injectif de E. Or E est de dimension finie, donc

$$f \in \mathrm{Aut}\,(E)$$

•

Exercice: Montrer que ces trois assertions équivalent à

$$(ii)bis \qquad \varphi \quad \text{conserve le produit scalaire}$$

i.e.

$$(ii)bis \qquad \forall (x,y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y)$$

Proposition 23.2.2 $(\mathcal{O}(E), \circ)$ *est un sous-groupe de* $(Aut(E), \circ)$ ♣

Démonstration
• $Id_E \in \mathcal{O}(E)$
• pour f, g quelconques dans $\mathcal{O}(E)$, on a $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (g \circ f(x) \mid g \circ f(y)) = (g(f(x)) \mid g(f(y))) = (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

D'où $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$
• pour f quelconques dans $\mathcal{O}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (f^{-1}(x) \mid f^{-1}(y)) = (f(f^{-1}(x)) \mid f(f^{-1}(y))) = (x \mid y)$$

D'où $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ •

Proposition 23.2.3 *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.*
φ est un automorphisme orthogonal si et seulement si l'image d'une (resp. de toute) base orthonormale est une base orthonormale. ♣

Démonstration
• **Si** $f \in \mathcal{O}(E)$, alors par isomorphisme quelle que soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ base orthonormale de E

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (f(\epsilon_i), f(\epsilon_j)) = (\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{ij}$$

Donc $(f(\mathcal{B}))$ est une famille orthonormale de n vecteurs de E, c'est donc une base orthonormale de E
• Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit orthonormale.
Pour $x = x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n$ et $y = y_1\epsilon_1 + \ldots + y_n\epsilon_n$ deux vecteurs et leurs décomposition relatives à $\mathcal{B}$

$$(f(x) \mid f(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(\epsilon_i) \mid \sum_{j=1}^{n} y_j f(\epsilon_j) \right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \underbrace{(f(\epsilon_i) \mid f(\epsilon_j))}_{\delta_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x \mid y)$$

•

Définition 23.2.2 (Matrices Orthogonales) *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est une matrice orthogonale lorsque son application canoniquement associée φ est un autorphisme orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.*
On note $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales

$$M \in \mathcal{O}(n) \Longleftrightarrow \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

♠

Corollaire 23.2.4 *$M \in \mathcal{O}(n)$ si et seulement si les colonnes de M forment une famille (resp. base) orthonormale* ♣

Exercice: Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$

$$M \in \mathcal{O}(n) \Longleftrightarrow {}^tMM = I_n \Longleftrightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M^{-1} = {}^tM$$

Corollaire 23.2.5 *$\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$* ♣

Proposition 23.2.6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une* ***base orthonormale*** *de E.*

$$f \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n)$$

♣

Démonstration On note $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (C_1 \ldots C_n)$$

On a

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (f(e_i) \mid f(e_j)) = \delta_{ij} \\ &\Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad {}^tC_iC_j = \delta_{ij} \\ &\Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (C_i \mid C_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n) \end{aligned}$$

•

Proposition 23.2.7 *Soit $M \in \mathcal{O}(n)$ (resp. $f \in \mathcal{O}(E)$), on a*

$$|\det M| = 1 \qquad (resp; \quad |\det f| = 1)$$

♣

Définition 23.2.3 *Puisque* $\det f = \det Mat_{\mathcal{B}}(f)$ *il et que* $f \in \mathcal{O}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n)$ *pour* $\mathcal{B}$ *b.o.n., il suffit de faire la preuve pour les matrices, or*

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \cdot \det(M) = \det(M)^2$$

♠

Définition 23.2.4 *On note $SO(n)$ (resp. $SO(E)$) le groupe de spécial orthogonal d'ordre n (resp. de E) défini par*

$$M \in SO(n) \iff M \in \mathcal{O}(n) \quad et \quad \det M = 1 \qquad (resp. \quad f \in SO(E) \iff f \in \mathcal{O}(E) \quad et \quad \det f = 1)$$

♠

Démonstration C'est le noyau du morphisme de groupes

$$: \begin{array}{ccc} (O(n), \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \times) \\ A & \longmapsto & \det A \end{array}$$

•

Définition 23.2.5 *$SO(E)$ est appelé le groupe des rotations de E* ♠

Proposition 23.2.8 *Soit $\mathcal{B}$ une* ***base orthonormale*** *$f \in \mathcal{L}(E)$*

$$f \in SO(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \in SO(n)$$

♣

Démonstration On sait déjà que $f \in \mathcal{O}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n)$.

$$f \in SO(E) \iff f \in \mathcal{O}(E) \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n) \quad \text{et} \quad \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 1 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in SO(n)$$

•

Proposition 23.2.9 *Soient $\mathcal{B}$ une* ***base orthonormale*** *(resp. $\mathcal{B}$ une* ***base orthonormale*** ***directe****) et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs*

$$\mathcal{F} \quad est\ une\ b.o.n. \iff Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in O(n)$$

$$(resp. \quad \mathcal{F} \quad est\ une\ b.o.n.d. \iff Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in SO(n))$$

♣

Démonstration En notant $f : E \to F$ tel que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \quad \text{est une } b.o.n \iff f \in \mathcal{O}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(n)$$

donc

$$\mathcal{F} \quad \text{est une } b.o.n.d \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(n) \quad \text{et} \quad \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) > 0 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(n) \quad \text{et} \quad \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 1$$

•

23.2.2 Automorphismes orthogonaux du plan

Dans cette section On suppose $\dim E = 2$.
E est un plan euclidien orienté par une base $\mathcal{B}_0$, on notera Det le déterminant relatif $\mathcal{B}_0$, c'est à dire le déterminant relatif à toute $b.o.n.d.$
En effet :

$$\forall \mathcal{B}\, b.o.n.d. \quad Det = \det_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})}_{=1} \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

23.2.2.1 Rotations

Proposition 23.2.10

$$SO(2) = \{R(\theta) \quad | \; \theta \in \mathbb{R}\}$$

où pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a posé

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

♣

Démonstration Si $M \in SO(2))$ avec $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

- Puisque $M \in \mathcal{O}(2)$, les colonnes de M forment une base orthonormale c'est à dire

$$\begin{cases} (C_1 \mid C_1) & = & 1 \\ (C_2 \mid C_2) & = & 1 \\ (C_1 \mid C_2) & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 & = & 1 \\ c^2 + d^2 & = & 1 \\ ac + bd & = & 0 \end{cases}$$

Donc puisque d'après les deux premières équations $|a + ib| = 1$ et $|d + ic| = 1$, on peut écrire

$$a = \cos\theta, \; b = \sin\theta \qquad \text{et} \qquad c = \sin\alpha, \; d = \cos\alpha$$

avec α, θ dans $\mathbb{R}$ On en déduit d'après la troisième équation

$$\cos\theta \sin\alpha + \cos\alpha \sin\theta = \sin(\alpha + \theta) = 0$$

i.e. $\theta + \alpha \equiv 0\,[\pi]$

⋆ 1er Cas : $\alpha \equiv -\theta\,[2\pi]$ Alors $M = R(\theta)$

⋆ 2eme Cas : $\alpha \equiv -\theta + \pi + \,[2\pi]$ Alors $M = S(\theta)$

Or puisque $M \in SO(2)$, on a $\det M = 1$, et donc puisque e$\det S(\theta) = -1$, on en déduit

$$M = R(\theta)$$

Réciproquement on a de façon évidente (par les mêmes calculs que ci-dessus sur les colonnes et le déterminant)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad R(\theta) \in SO(2)$$

•

Remarque 23.2.1 *On a montré que les matrices M de $O(2)$, s'écrivent sous la forme*

$$M = R(\theta) \quad \text{ou} \quad M = S(\theta)$$

ce qui prouve que $\det(M) \in \{1, -1\}$, *pour* $M \in O(2)$ ∗

Remarque 23.2.2 $\theta \mapsto R(\theta)$ *est un morphisme de groupes entre* $(\mathbb{R}, +)$ *et* $(SO(2), \times)$
En particulier :

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$$

∗

Corollaire 23.2.11 $(SO(2), \times)$ *est un sous-groupe abélien de* $(O(2), \times)$. ♣

Proposition 23.2.12 *Soit $f \in SO(E)$, on peut trouver un réel θ (unique modulo 2π) tel que pour* ***toute base orthonormée directe*** $\mathcal{B}$, *on a*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta)$$

♣

Démonstration

$$R(\theta) = R(\theta') \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta', [2\pi]$$

D'où l'unicité modulo 2π

Montrons l'existence. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E, on a d'après la caractérisation de $SO(2)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in SO(2) \quad \textit{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta) \qquad \textit{avec} \ \ \theta \in \mathbb{R}$$

Or $P := P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO(2)$. Donc par commutativité de $SO(2)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}R(\theta)P = PP^{-1}R(\theta) = R(\theta)$$

•

Définition 23.2.6 *En reprenant les notations ci-dessus. θ (défini modulo 2π) est ce qu'on appelle la mesure de l'angle de la rotation f* ♠

Proposition 23.2.13 *Soit r une rotation et $\theta \in \mathbb{R}$* **Alors** *quel que soit a vecteur* ***unitaire***

$$\cos\theta = (a \mid u(a)) \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = Det(a, u(a))$$

♣

Démonstration.
On complète a en une b.o.n.d $\mathcal{B} = (a, b)$ $R(\theta)$ est la matrice de r relative à la b.o.n.d $\mathcal{B}$.

$$(a \mid u(a)) = (a \mid \cos\theta a + \sin\theta b) = \|a\|^2 \cos\theta = \cos\theta$$

$$Det(a, u(a)) = Det(a, \cos\theta a + \sin\theta b) = \sin\theta Det(a, b) = \sin\theta$$

•

Exemple: Déterminons la matrice et l'angle de la rotation de $\mathcal{P}$ canonique relative à la base canonique (i, j) de la rotation r telle que

$$r(i) = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$$

l'angle θ est caractérisé par

$$\cos\theta = (i \mid r(i)) = (i \mid \frac{i+j}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\,(i, r(i)) = Det(i, \frac{i+j}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On en déduit que $\theta \equiv \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, et la matrice relative à (i, j) est donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 23.2.7 *Si u et v sont deux vecteurs non nuls on dit $(u, v) = \theta$ est la mesure d'angle orientée entre u et v lorsque*

$$\frac{v}{\|v\|} = Rot_\theta(\frac{u}{\|u\|})$$

Où Rot_θ est la rotation d'angle θ ♠

Exercice: Montrer que pour $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' := (e'_1, e'_2)$ deux b.o.n.d. de E, on a les formules de changement de coordonnées entre les anciennes (x, y) relatives à $\mathcal{B}$ et les nouvelles (x', y') relatives à $\mathcal{B}'$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' & = & -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y & = & x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{array}\right.$$

23.2.2.2 Réflexions, symétries

Définition 23.2.8 *On dit que s est* ***symétrie orthogonale*** *lorsque*

$$s \in \mathcal{O}(E) \qquad et \qquad s \circ s = Id_E$$

c'est la symétrie orthogonale par rapport à $F := \ker(s - Id_E)$. Dans le cas où F est une droite vectorielle (i.e s n'est pas la symétrie triviale Id_E), on dit que s est la ***réflexion*** *par rapport à F* ♠

Exemple: $-Id$ est une symétrie orthogonale, mais n'est pas une réflexion

Remarque: F est l'ensemble des **invariants de** s, noté parfois **Inv(s)**. En notant $G = \ker(s + Id_E)$, on a

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in F \times G, \quad \underbrace{(x \mid y) = 0}_{x \perp y}$$

Dans le cas de la réflexion en notant $F = \mathbb{R}u$ on a $G = \mathbb{R}v$ avec $v \perp u$, et on note $G = (\mathbb{R}u)^{\perp} = F^{\perp}$ et $F = G^{\perp}$

Proposition 23.2.14 *Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ une b.o.n. de E, $\alpha \in \mathbb{R}$ et g défini par*

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{S(\alpha)}$$

Alors g est la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par

$$\cos\frac{\alpha}{2}\epsilon_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\epsilon_2$$

♣

Démonstration On a par un calcul immédiat

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^2) = I_2 \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{O}(2)$$

g est donc une symétrie orthogonale.
Dans le cas où $\alpha \equiv 0[\pi]$ le résultat est évident. Dans le cas contraire cherchons les invariants de g.
Soit $u = x\epsilon_1 + y\epsilon_2$ un vecteur de E et sa décomposition

$$u \in Inv(g) \iff \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\cos\alpha - 1)x + \sin\alpha y &= 0 \\ (\sin\alpha x - (1 + \cos\alpha)y &= 0 \end{cases}$$

$$u \in Inv(g) \iff \begin{cases} 2\sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \left[-\sin(\frac{\alpha}{2})x + \cos(\frac{\alpha}{2})y \right] &= 0 \\ 2\cos(\frac{\alpha}{2}) \cdot \left[\sin(\frac{\alpha}{2})x - \cos(\frac{\alpha}{2})y \right] &= 0 \end{cases} \iff \sin(\frac{\alpha}{2})x - \cos(\frac{\alpha}{2})y = 0 \iff \begin{vmatrix} x & \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ y & \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{vmatrix} = 0$$

Donc

$$u \in Inv(g) \iff u \text{ et } \cos\frac{\alpha}{2}\epsilon_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\epsilon_2 \ \text{ colinéaires}$$

D'où $Inv(g) = \mathbb{R}(\cos\frac{\alpha}{2}\epsilon_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\epsilon_2)$ •

Proposition 23.2.15 *$\mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$ est l'ensemble des réflexions* ♣

Démonstration Soit s une réflexion, la réflexion par rapport à la droite dirigée par u avec u unitaire que l'on complète, en une b.o.n. $\mathcal{B} := (u, v)$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ D'où $\det s = -1$, or $s \in O(E)$, donc les réflexions sont dans $\mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$.

Réciproquement soit $g \in \mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$, on a dans une b.o.n. $\mathcal{B}_0$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est donc une réflexion •

Exemple: Déterminons la la réflexion de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dont la matrice est

$$A := \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est bien une symétrie orthogonale puisque $A^2 = I_2$ et

$$(C_1 \mid C_2) = 0 \qquad (C_1 \mid C_1) = 1 \quad \text{et} \quad (C_2 \mid C_2) = 1$$

Enfin c'est une réflexion puisqu'en calculant l'ensemble des vecteurs invariants on trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Inv(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y & = & 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

s est donc de la réflexion par rapport à la droite dirigée par $(1+\sqrt{2})i + j$

23.2.2.3 Générateurs du groupe orthogonal

Proposition 23.2.16 *Toute rotation est la composée de deux réflexions* ♣

Démonstration $S_\alpha S_\beta = R(\alpha - \beta)$

Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n.d. et f la rotation d'angle θ.
Soient α, β tels que $\alpha - \beta = \theta$ par exemple $\alpha = \theta$ et $\beta = 0$ en posant s_α s_β dont les matrices relatives à $\mathcal{B}$ sont S_α et S_β

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta) = S_\alpha S_\beta$$

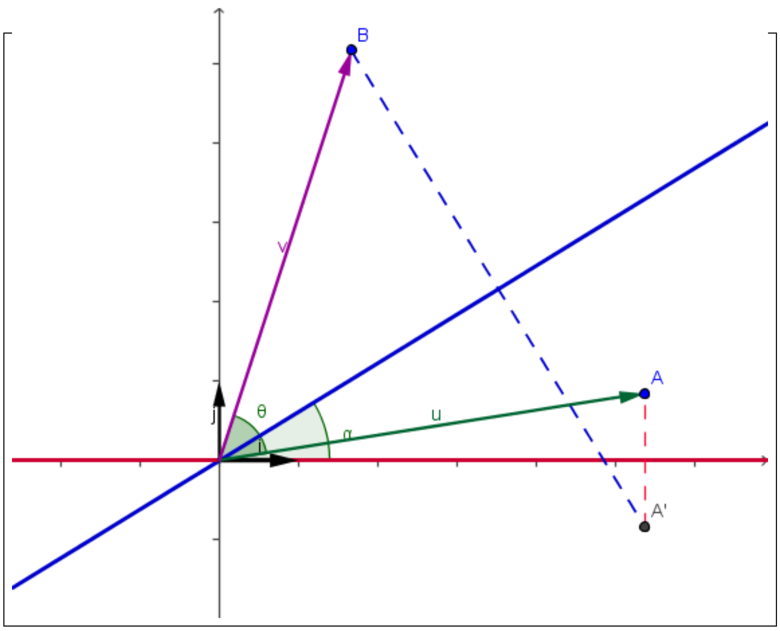
d'où $f = s_\alpha \circ s_\beta$ •

Remarque 23.2.3 *Dans le cas $\alpha = \theta$ et $\beta = 0$ en posant $\mathcal{B} = (i,j)$, on voit que Rot_θ est la composée de s_θ réflexion d'axe dirigé par*

$$Rot_{\frac{\theta}{2}}(i) = \cos\frac{\theta}{2}i + \sin\frac{\theta}{2}j$$

avec s_0 réflexion d'axe $\mathbb{R}i$

$$Rot_\theta = s_\theta \circ s_0$$



*

Corollaire 23.2.17 *Tout automorphisme orthogonal du plan E est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions* ♣

23.2.3 Automorphismes orthogonaux de l'espace

Dans cette section On suppose $\dim E = 2$.
E est un espace euclidien orienté par une base $\mathcal{B}_0$, on notera Det le déterminant relatif $\mathcal{B}_0$, c'est à dire le déterminant relatif à toute $b.o.n.d$.
En effet :

$$\forall \mathcal{B}\; b.o.n.d. \quad Det = \det_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})}_{=1} \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

23.2.3.1 Rappels de Géométrie

Définition 23.2.9 (Orientation d'un plan) *Soit P un plan de E (sous-espace de dimension 2, c'est à dire un hyperplan) et n un vecteur unitaire orthogonal à tout vecteur de P*

$$\forall x \in P, \qquad (x \mid n) = 0$$

*On dit n est unitaire et **normal** à P.*
On dit P est orienté par n lorsque

$$\forall \mathcal{C}\ b.o.n.\ de\ P \qquad \mathcal{C} = (e_1, e_2)\ b.o.n.d\ de\ P \Longleftrightarrow \mathcal{B} := (e_1, e_2, n)\ b.o.n.d\ de\ E$$

♠

Remarque: On dira qu'un vecteur u normal P, oriente P lorsque celui-ci est orienté par $\frac{u}{\|u\|}$.

Remarque: Si u, v sont non colinéaires dans le plan P, alors

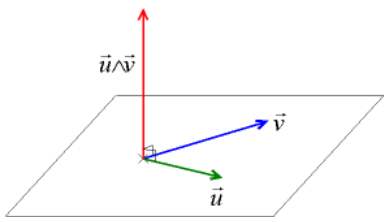
$$w \quad \text{directement orthogonal à } u\ et\ v \Longleftrightarrow (u, v, w) \quad \text{base directe} \quad \text{et} \quad u \perp w \quad v \perp w$$

Définition 23.2.10 (Géométrique) *Soient u et v deux vecteurs de E on appelle produit vectoriel de u et v le vecteur noté $u \wedge v$ et défini par*

$$\begin{array}{rcll} u \wedge v & = & \|u\|\| \cdot \|v\| \cdot \sin\theta \cdot n & \quad \textbf{Si } u \text{ et } v \text{ non colinéaires} \\ u \wedge v & = & 0 & \quad \textbf{sinon} \end{array}$$

Dans le cas non colinéaire :
n est le vecteur unitaire normal à $P := Vect(u, v)$ directement orthogonal à (u, v).
θ est une mesure de l'angle (u, v) orienté par n.

♠



Proposition 23.2.18 *Quels que soient u, v, w dans E*

$$Det(u, v, w) = \Big((u \wedge v) \mid w\Big)$$

♣

Définition 23.2.11 *Soient P et D un plan et une droit vectorielle de E on note $P = D^\perp$ (resp $D = P^\perp$) lorsque les vecteurs de l'un sont orthogonaux aux vecteurs de l'autre.*
En particulier **Si** $P = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ *et* $D = \mathbb{R}w$ **Alors**

$$P^\perp = D \quad (resp.\ \ D^\perp = P) \Longleftrightarrow u \perp w \quad et \quad v \perp w$$

On a en toute généralité

$$E = P \oplus P^\perp = D \oplus D^\perp$$

♠

23.2.3.2 Rotations

Définition 23.2.12 *Soit $D = \mathbb{R}k$ droite vectorielle de E orienté par k unitaire, et $\theta \in \mathbb{R}$.*
On note $P := D^{\perp}$ orienté par k et r la rotation d'angle θ

$$Rot_{k,\theta} : x \mapsto \begin{cases} x & si \quad x \in D \\ r(x) & si \quad x \in P \end{cases}$$

$Rot_{k,\theta}$, est la ***rotation axiale*** *d'axe $\mathbb{R}k$ et d'angle θ, ou rotation d'angle θ autour de k* ♠

Remarque: pour k unitaire et θ, θ' réels

$$Rot_{k,\theta} = Rot_{k,\theta'} \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta' \, [2\pi]$$

$$Rot_{-k,\theta} = Rot_{k,-\theta}$$

Remarque: $Rot_{k,\pi}$ est ce qu'on appelle le retournement d'axe $\mathbb{R}k$

Proposition 23.2.19 *Soient k unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$ Dans une b.o.n.d. $\mathcal{B}$ de E adaptée à $E = (\mathbb{R}k)^{\perp} \oplus \mathbb{R}k$*

$$Mat_{\mathcal{B}}(Rot_{k,\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

En particulier $Rot_{k,\theta} \in SO(E)$, ♣

Démonstration On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, k)$ puisque $Rot_{k,\theta}$ induit la rotation $r : P \to P$ d'angle θ où $P := (\mathbb{R}k)^{\perp}$ orienté par k. on a (e_1, e_2) est une b.o.n.d. de P et $\text{Mat}_{(e_1,e_2)} = R(\theta)$ De plus $Rot_{k,\theta}(k) = k$, d'où la matrice M de la rotation.
De plus les colonnes de cette matrice sont deux à deux orthogonales et de norme 1, d'où $M \in O(3)$, enfin en développant par rapport à la dernière colonne on trouve

$$\det M = \det R(\theta) = 1$$

•

Remarque: Contrairement à $SO(2)$, $SO(3)$ n'est pas abélien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$AB := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 23.2.20 *Soit $f \in SO(E)$. On note $Inv(f) := \ker(f - Id_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants de f*

$$\dim Inv(f) = 1 \Longrightarrow f \textit{ est la rotation d'axe } Inv(f)$$

♣

Démonstration En notant k un vecteur unitaire dirigeant le droite vectorielle $D = Inv(f)$, et $P = D^{\perp}$, on a
• $f(P) \subset P$ Puisque k est normal à P, il suffit de montrer que

$$\forall x \in P, \qquad f(x) \perp k$$

or

$$\forall x \in P, \quad (f(x) \mid k) = (f(x) \mid f(k)) = (x \mid k) = 0$$

On en déduit que f induit un endomorphisme $r : P \to P$

• $r \in O(P)$
En effet pour tout x, y dans P

$$(r(x) \mid r(y)) = (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

• Relativement à une b.o.n.d. (e_1, e_2, k) adaptée à $E = P \oplus D$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & M & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $M = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(r)$
• $r \in SO(P)$
En effet En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne

$$1 = \det \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(r) = \det r$$

• Conclusion

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & si \quad x \in D \\ r(x) & si \quad x \in P \end{cases}$$

où r est une rotation de P... CQFD •

Remarque: On montre par un calcul des invariants que $f \in SO(E)$ si et seulement si f est une rotation axiale

Proposition 23.2.21 *Soit f une rotation axiale d'angle θ autour de k(avec k* ***unitaire****).*
Pour tout a ***non nul orthogonal à*** *k on a*

$$f(a) = \cos(\theta) \cdot a + \sin(\theta) \cdot (k \wedge a)$$

En particulier si a est ***unitaire***

$$\cos(\theta) = (a \mid f(a)) \qquad et \qquad \sin(\theta) = Det(a, f(a), k)$$

♣

Démonstration.
Quitte à diviser par $\|a\|$, on peut supposer a unitaire.
Puisque $(a, k \wedge a, k)$ est une b.o.n.d. adaptée à $E = P \oplus D$ avec $D = \mathbb{R}k$ et $P = D^{\perp}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où grâce à la première colonne de cette matrice

$$f(a) = \cos(\theta) \cdot a + \sin(\theta) \cdot (k \wedge a)$$

Et donc par produit scalaire avec a puisque $(k \wedge a) \perp a$ et que $(a \mid a) = 1$

$$(a \mid f(a)) = \cos(\theta)$$

Enfin par passage au déterminant

$$Det(a, f(a), k) = \cos(\theta) \cdot \underbrace{Det(a, a, k)}_{=0} + \sin(\theta) \cdot \underbrace{Det(a, k \wedge a, k)}_{=1}$$

•

Exemple: Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique muni de sa base canonique $\mathcal{B} := (i, j, k)$. Déterminons la matrice de la rotation r d'angle θ autour de $\omega = (1, 1, 0)$.
On considère une b.o.n.d. (a, b) du plan de normal et orienté par $\widetilde{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ et dont l'équation est

$$x + y = 0$$

Lycée J-B. Say - Martin Del Hierro

Par exemple $a := \frac{i-j}{\sqrt{2}}$ et $b := \widetilde{\omega} \wedge a = (0,0,-1)$ est unitaire et orthogonal à ω.
On a par rapport à la bond $\mathcal{C} = (a, b, \omega)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or puisque

$$P := P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \textit{donc } P^{-1} = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(r)P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & 1-\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \\ 1-\cos\theta & 1+\cos\theta & -\sqrt{2}\sin\theta \\ -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Autre méthode bien plus directe
On décompose tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ selon la décomposition $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}\omega)^\perp + \mathbb{R}\omega$

$$u = x_\perp + x_\omega = x_\perp + \lambda\widetilde{\omega}$$

avec par passage au produit scalaire $\lambda = (u \mid \widetilde{\omega}) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, i.e.[1]

$$x_\omega = (u \mid \widetilde{\omega})\widetilde{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \textit{donc } x_\perp = x - (u \mid \widetilde{\omega})\widetilde{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix}$$

On en déduit puisque $x_\perp \perp \widetilde{\omega}$

$$r(u) = r(x_\perp) + x_\omega = \cos\theta x_\perp + \sin\theta\widetilde{\omega} \wedge x_\perp + x_\omega$$

i.e.

$$r(x,y,z) = \cos\theta \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(x,y,z) = \cos\theta \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: Soit r canoniquement associé à la matrice $A := \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique (i, j, k).
C'est la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ car on a

$$(C_1 \mid C_2) = 0 \quad (C_1 \mid C_3) = 0 \quad (C_2 \mid C_3) = 0 \quad \text{et} \quad (C_1 \mid C_1) = 1 \quad (C_2 \mid C_2) = 1 \quad (C_3 \mid C_3) = 1$$

On retrouve ceci grâce à l'identité ${}^tAA = I_3$ puisque ${}^tAA = ({}^tC_iC_j)_{1\leq i,j\leq 3}$

Par ailleurs $\det A = 1$, cherchons l'ensemble des invariants :
Pour $u = (x, y, z)$ quelconque dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$u \in Inv(r) \iff u \in \mathbb{R}\omega \qquad \textit{avec} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3i + j + k)$$

Donc r est la rotation d'axe ω, cherchons son angle.
Puisque $(\mathbb{R}\omega)^\perp$ a pour équation cartésienne

$$-3x + y + z = 0$$

[1] c'est la décomposition relative au projection orthogonale sur $\mathbb{R}\omega$

On voit que $a := \frac{(0,-1,1)}{sqrt2} \in (\mathbb{R}\omega)^{\perp}$, et de plus a est unitaire, d'où la caractérisation de l'angle θ de la rotation

$$\cos\theta = (a \mid r(a)) = \frac{7}{18} \quad \text{et} \quad \sin\theta = Det(a, r(a), \omega) = \frac{5\sqrt{11}}{18}$$

Exercice: Etudier r canoniquement associé à la matrice $A := -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique (i, j, k).

23.2.3.3 Réflexions, symétries

Définition 23.2.13 *On dit que s est **symétrie orthogonale** lorsque*

$$s \in \mathcal{O}(E) \qquad et \qquad s \circ s = Id_E$$

*c'est la symétrie orthogonale par rapport à $P := \ker(s - Id_E) = Inv(f)$. Dans le cas où P est un plan vectorielle (i.e un hyperplan de E), on dit que s est la **réflexion** par rapport à P* ♠

Remarque: En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base adaptée à $E = P \oplus P^{\perp}$ on a pour f réflexion par rapport au plan P

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3) \setminus SO(3)$$

En particulier $f \in \mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$

Proposition 23.2.22 *Soit $f \in \mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$. On note $Inv(f) := \ker(f - Id_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants de f*

$$\dim Inv(f) = 2 \Longrightarrow f \textit{ est la réflexion par rapport à } Inv(f)$$

♣

Démonstration En notant $P = Inv(f)$ et $D = P^{\perp} = \mathbb{R}k$, on a
• $f(D) \subset D$ Puisque k est normal à P, il suffit de montrer que

$$\forall x \in D, \qquad f(x) \perp P$$

or

$$\forall x \in D,\ \forall y \in P, \quad (f(x) \mid y) = (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y) = 0$$

• Relativement à une b.o.n.d. (e_1, e_2, k) adaptée à $E = P \oplus D$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

• $a = -1$.
En effet par le calcul du déterminant

$$-1 = \det f = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = a$$

• Conclusion :
Vu la matrice de f ; f est la réflexion par rapport à P •

Exercice: Montrer que la réflexion S par rapport à $\mathbb{R}k$ avec k unitaire, vérifie

$$S : x \mapsto x - 2(x \mid k)k$$

Exemple: Soit s canoniquement associé à la matrice $B := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique (i, j, k).
C'est la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ car on a

$$(C_1 \mid C_2) = 0 \quad (C_1 \mid C_3) = 0 \quad (C_2 \mid C_3) = 0 \quad \text{et} \quad (C_1 \mid C_1) = 1 \quad (C_2 \mid C_2) = 1 \quad (C_3 \mid C_3) = 1$$

On retrouve ceci grâce à l'identité ${}^tAA = I_3$ puisque ${}^tAA = ({}^tC_iC_j)_{1\leq i,j\leq 3}$

Par ailleurs $\det A = -1$, Montrons que c'est une symétrie orthogonale, en effet

$$A^2 = I_3$$

Montrons que c'est une réflexion, cherchons l'ensemble des invariants :
Pour $u = (x, y, z)$ quelconque dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$u \in Inv(s) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -8x + 4y - 8z & = & 0 \\ 4x - 2y + 4z & = & 0 \\ -8x + 4y - 8z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow 2x - y + 2z = 0 \Longleftrightarrow u \in (\mathbb{R}\omega)^\perp \qquad avec \quad \omega = (2, -1, 2)$$

Donc s est la réflexion par rapport au plan de normale ω.
On peut grâce à l'équation trouver $2x-y+2z = 0$ trouver deux vecteurs directeurs, par exemple $(1, 0, -1)$ et $(0, 2, 1)$

Proposition 23.2.23 *Toute rotation est la composée de deux réflexions* ♣

Démonstration Soit $f = Rot_{k,\theta}$ et $\mathcal{B} := (i, j, k)$ une b.o.n.d. adaptée à $E = P \oplus D$ avec $P := D^\perp$ et $D := \mathbb{R}k$.
On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En notant s_0 la réflexion par rapport à $\mathbb{R}i + \mathbb{R}k$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$u = Rot_{k,\frac{\theta}{2}}(i) = \cos\frac{\theta}{2}i + \sin\frac{\theta}{2}j$$

En notant s_u la réflexion par rapport à $\mathbb{R}u + \mathbb{R}k$.
On a puisque $u \wedge k$ est unitaire normal à $\mathbb{R}u + \mathbb{R}k$

$$s_u : x \mapsto x - 2\Big((u \wedge k) \mid x\Big)(u \wedge k)$$

Or $u \wedge k = \cos\frac{\theta}{2} i \wedge k + \sin\frac{\theta}{2} i \wedge k = -\cos\frac{\theta}{2} j + \sin\frac{\theta}{2} i$ D'où

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'était prévisible puisque s_u induit sur $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j$ la réflexion d'axe $Rot_{\frac{\theta}{2}}(i)$

Conclusion : Puisque par un calcul direct on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s_u)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s_0)$$

On a $f = s_u \circ s_0$ •

Remarque: les réflexions qui entrent dans la décomposition de la rotation $f := Rot_{k,\theta}$ s'obtiennent par extension des réflexions planes qui décomposent la rotation du plan Rot_θ induite par f sur $(\mathbb{R}k)^\perp$

Remarque 23.2.4 *Contrairement au cas de la dimension, il existe des automorphismes orthogonaux de l'espace E qui ne sont ni une réflexion, ni la composée de deux réflexions : par exemple $-Id_E$ (symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$)* $*$

Remarque: Dans le cas où $f \in O(3)$ n'est ni une réflexion, ni une rotation axiale, ni $\sigma := -Id_E$, on peut étudier $g := -f$.
$g \in O(3)$, f est alors la composée σ et g

23.3 Transformations du plan et de l'espace

Dans toute la suite on note $\mathcal{A}$ l'espace affine $\mathcal{P}$ des points du plan (resp. $\mathcal{E}$ des points de l'espace), la direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ (i.e $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) étant orientée par sa base canonique.

23.3.1 Généralités sur les transformations affines

Définition 23.3.1 *On dit que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est une transformation affine de $\mathcal{A}$, lorsque pour un (resp. tout) point $\Omega \in \mathcal{A}$ l'application*

$$\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

définie par

$$\forall M \in \mathcal{A}, \qquad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)}$$

est une application linéaire, dite application linéaire associée à l'application affine f (elle est indépendante du choix de Ω) ♠

Démonstration On note φ_Ω et $\varphi_{\Omega'}$ les applications linéaires associées relativement à Ω resp. Ω' elles sont linéaires d'où pour tout u on note

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega' M'}$$

On a alors

$$u = \overrightarrow{\Omega M'} - \overrightarrow{\Omega\Omega'}$$

D'où

$$\varphi_\Omega(u) = \varphi_\Omega(\overrightarrow{\Omega M'}) - \varphi_\Omega(\overrightarrow{\Omega\Omega'}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(M')} - \overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega')} = \overrightarrow{f(\Omega')f(M')} = \varphi_{\Omega'}(u)$$

•

Remarque: On a[2] pour tout $M \in \mathcal{A}$

$$f(M) = f(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M})$$

En particulier une transformation affine est entièrement déterminée par l'image d'un point et par la donnée de sa partie linéaire.

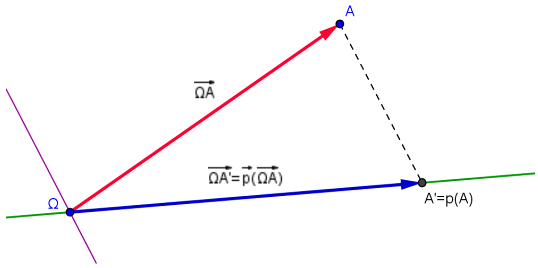
$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + f(\overrightarrow{u})$$

Exercice: Montrer que quelle que soit Ω point de $\mathcal{A}$ et $\overrightarrow{F}$ sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$

Définition 23.3.2 *Soient $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{p} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ son application linéaire associée. On dit que p est projection affine sur $\Omega + \overrightarrow{F}$ parallèlement à $\Omega + \overrightarrow{G}$ lorsque :*
$\overrightarrow{p}$ projection sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ et $p(\Omega) = \Omega$ On a alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad p(A) = \Omega + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{\Omega A})$$

[2]Rappelons que $A + \overrightarrow{u}$ est le translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{u}$

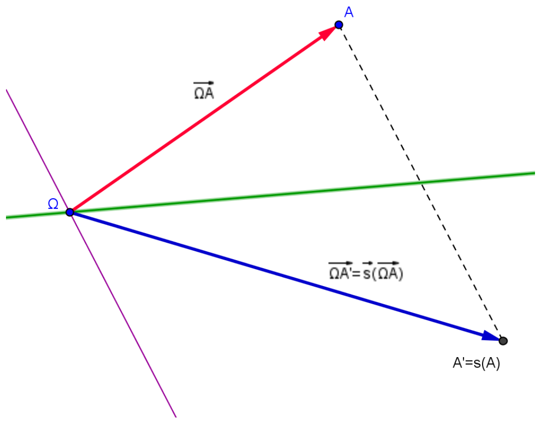


♠

Exemple: Si p est un projecteur :
p est un projecteur orthogonal si et seulement si $F \perp G$ si et seulement si $F \perp G$ si et seulement si $\overrightarrow{p}$ projecteur orthogonal

Définition 23.3.3 *Soient $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{s} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}}$ son application linéaire associée. On dit que s est symétrie affine par rapport à $\Omega + \overrightarrow{F}$ parallèlement à $\Omega + \overrightarrow{G}$ lorsque :*
$\overrightarrow{s}$ symétrie sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ et $s(\Omega) = \Omega$ On a alors

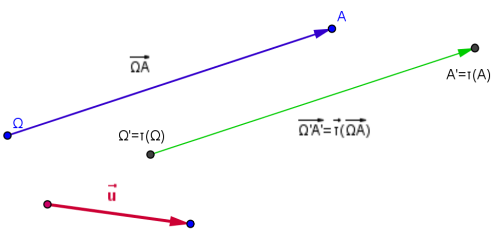
$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad s(A) = \Omega + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{\Omega A})$$



♠

Exemple: Si s est une symétrie :
s est une symétrie orthogonalz si et seulement si $F \perp G$ si et seulement si $F \perp G$ si et seulement si $\overrightarrow{z}$ symétrie orthogonale

Définition 23.3.4 *τ est une translation de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\overrightarrow{\tau} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$*



il s'agit alors de la translation de vecteur $\overrightarrow{A\tau(A)}$ (avec $A \in \mathcal{A}$ quelconque) ♠

Proposition 23.3.1 *Pour f et g affines on a $g \circ f$ est une composition affine et*

$$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$$

♣

Démonstration

$$\overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{g(f(A))g(f(B))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(AB))$$

•

Exercice: Quels que soient f, g affines

$$f = g \iff \exists \tau \text{ translation } g = \tau \circ f$$

Exercice: Soit f une transformation affine et Ω un point fixe de f.
f symétrie affine par rapport à $\Omega + \overrightarrow{F}$ parallèlement à $\Omega + \overrightarrow{G} \iff \overrightarrow{f}$ symétrie par rapport à $\overrightarrow{F}$ parrallélement à $\overrightarrow{G}$

Exercice: Soit f une transformation affine et Ω un point fixe de f.

Exercice: Soit p vérifiant $p \circ p = p$ et Ω un point fixe de p.
Montrer que p est le projecteur sur $\Omega + \mathrm{Im}\,(p)$ parallélelement à $\Omega + \ker(p)$

Exercice: Soit s vérifiant $s \circ s = s$ et Ω un point fixe de p.
Montrer que s est la symétrie par rapport à $\Omega + Inv(s)$ parallèlement à $\Omega + \ker(s + Id)$

Remarque: Dans le cas où f admet un point fixe Ω, alors f est du même type que $\overrightarrow{f}$. Dans le cas contraire on peut se ramener au cas précédent par composition avec une translation (la composition avec la translation τ de vecteur $\overrightarrow{f(M)M}$ fait de M le point fixe de $\tau \circ f$)

Corollaire 23.3.2 *Lorsque f est une transformation bijective*

$$\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$$

♣

23.3.2 Isométries

Définition 23.3.5 *On appelle isométrie affine toute application affine $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui conserve les distances :*

$$\forall (M, N) \in \mathcal{A}^2, \qquad d(f(M), f(N)) = d(M, N)$$

♠

Remarque: f est une isométrie affine de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{A}})$

Démonstration

$$\forall (M, N) \in \mathcal{A}^2,\ d(f(M), f(N)) = d(M, N) \iff \forall (M, N) \in \mathcal{A}^2,\ \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$$
$$\iff \forall (M, N) \in \mathcal{A}^2,\ \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\|$$
$$\iff \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \quad \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$$

•

Exercice: Montrer que pour toute isométrie f, on a

$$f(\Omega + F) = f(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \quad \text{et} \quad f(\Omega + \overrightarrow{F}^{\perp}) = f(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})^{\perp}$$

Remarque: l'ensemble des isométries de $\mathcal{A}$ est un sous-groupe pour la composition du groupe des bijections de $\mathcal{A}$

Définition 23.3.6 *Soit f une transformation affine de $\mathcal{A}$.*
f est un déplacement si et seulement si $\overrightarrow{f} \in SO(\overrightarrow{\mathcal{A}})$ ♠

Exemple: les translations sont des déplacements

Remarque: l'ensemble des déplacements de $\mathcal{A}$ est un sous-groupe pour la composition du groupe des isométries de $\mathcal{A}$

Proposition 23.3.3 *Etant donnés deux points distincts A et B de $\mathcal{A}$, il existe une réflexion affine et une seule échangeant A et B* ♣

Démonstration On pose I milieu de $[A,B]$ et $\mathcal{H}$ hyperplan affine médiateur

$$\mathcal{H} = I + (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^{\perp}$$

B est l'image de A par la réflexion par rapport à $\mathcal{H}$ D'où l'existence.

L'unicité provient du fait que pour $s_{\mathcal{H}}$ réflexion d'hyperplan $\mathcal{H} = \Omega + (\mathbb{R}\overrightarrow{u})^{\perp}$ avec u unitaire on a (puisque $\overrightarrow{s_{\mathcal{H}}}$ est la réflexion vectorielle par rapport à $(\mathbb{R}u)^{\perp}$)

$$s_{\mathcal{H}}(A) = B \iff \overrightarrow{\Omega s_{\mathcal{H}}(A)} = \overrightarrow{\Omega B} \iff \overrightarrow{s_{\mathcal{H}}}(\Omega A) = \Omega B \iff \overrightarrow{\Omega A} - 2(\overrightarrow{\Omega A} \mid \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega B} \iff \overrightarrow{BA} = 2(\overrightarrow{\Omega A} \mid \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$

$\iff \overrightarrow{BA}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{\Omega A}$
i.e. $\mathcal{H}$ passe par le milieu Ω de $[AB]$ et est perpendiculaire à (AB) •

Proposition 23.3.4 *Toute isométrie est la composée de réflexions* ♣

23.3.3 Transformations du Plan

23.3.3.1 Isométries du Plan

Dans ce paragraphe on se place dans le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{P}$

23.3.3.1.1 Cas général

Exemple: les translations, les réflexions et les rotations (applications affines dont les parties linéaires sont resp. $Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, resp. des réflexions, resp. des rotations) sont des isométries du plan

Proposition 23.3.5 *l'image par une isométrie d'un barycentre $G := Bar((A_i, \alpha_i)_{i\in I})$ est le barycentre des images pondérés par les mêmes poids*

$$f(G) = Bar((f(A_i), \alpha_i)_{i\in I})$$

♣

Démonstration Soit f une isométrie[3] on note que $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 0$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

D'où en composant par $\overrightarrow{f}$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{0}$$

i.e.

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \overrightarrow{0}$$

CQFD •

Proposition 23.3.6 *L'image d'une droite (resp. deux droites parallèles, resp. deux droites perpendiculaires) par une isométrie est une droite (resp. deux droites parallèles, resp. deux droites perpendiculaires)* ♣

[3] en fait application affine suffit

Démonstration

$$G \in (AB) \Longleftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \quad G = Bar((A,\lambda),(B,\mu))$$

donc

$$H \in f((AB)) \Longleftrightarrow \exists G \in (AB); \quad H = f(G) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2; \quad H = \underbrace{f(Bar((A,\lambda),(B,\mu)))}_{Bar((f(A),\lambda),(f(B),\mu)))} \Longleftrightarrow H \in (f(A)f(B))$$

Ceci montre que

$$f(\Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{u}) = f(\Omega) + \mathbb{R}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

D'où la seconde partie de la proposition puisque par affinité et isométrie $\overrightarrow{f}$ conserve la colinéarité (linéarité) et l'orthogonalité (conservation du p.s.) de deux vecteurs. •

Proposition 23.3.7 *L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon* ♣

23.3.3.1.2 Cas des déplacements

Définition 23.3.7 *Soit r une rotation de partie linéaire Rot_θ avec $\theta \neq 0$ $[2\pi]$ alors $r := Rot_{\Omega,\theta}$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ, où Ω est l'unique point invariant de r*

$$\forall M \in \mathcal{P}, \qquad r(M) = M \Longleftrightarrow M = \Omega$$

♠

Proposition 23.3.8 *Tout déplacement de $\mathcal{P}$ est soit une translation soit une rotation* ♣

Démonstration f déplacement si et seulement si $\overrightarrow{f}$ rotation vectorielle

si $\overrightarrow{f}$ rotation d'angle non nul (modulo 2π) alors f est une rotation

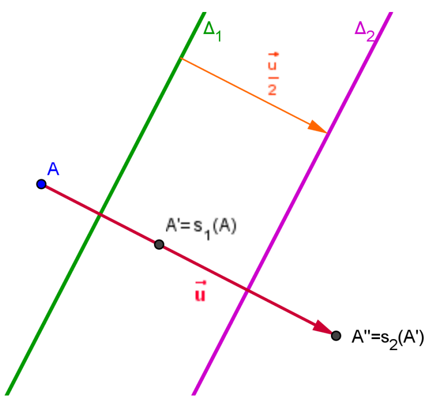
sinon c'est une translation

•

Proposition 23.3.9 *Les déplacements f de $\mathcal{P}$ s'écrivent comme la composée de deux réflexions s_1 et s_2 relatives à Δ_1 et Δ_2 respectivement.*

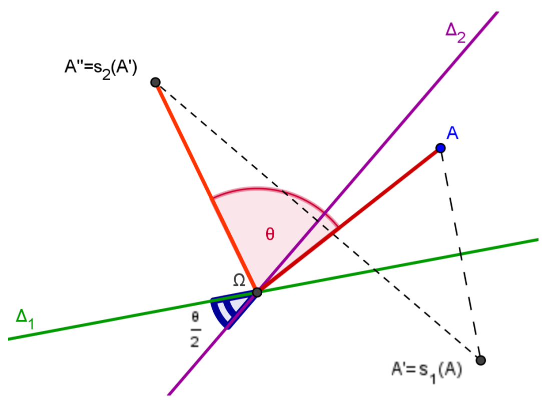
$$f = s_2 \circ s_1$$

• **Si** $f := \tau_{\overrightarrow{u}}$ *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$*, on peut prendre* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\Delta_1}$ *et* $\Delta_2 = \tau_{\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(\Delta_1)$



• **Si** $f := Rot_{\Omega,\theta}$ *est la rotation de centre* Ω *et d'angle* θ*, on peut prendre*

$$\Omega \in \Delta_1 \qquad et \qquad \Delta_2 = Rot_{\Omega,\frac{\theta}{2}}(\Delta_1)$$



i.e. $\Delta_1 = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$
et $\Delta_2 = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ *avec* $\overrightarrow{v} = Rot_{\frac{\theta}{2}}(\overrightarrow{u})$

♣

Démonstration Dans le cas de la translation s_1 et s_2 ont pour partie linéaire la réflexion r par rapport $\overrightarrow{\Delta_1}$, ainsi $s_2 \circ s_1$ est une translation, la translation de vecteur

$$\overrightarrow{As_2 \circ s_1(A)} = \overrightarrow{As_2(A)} = \overrightarrow{u}$$

avec $A \in \Delta_1$

Dans le cas de la rotation, Ω est point fixe de s_1 et s_2

$$\overrightarrow{s_2 \circ s_1} = \overrightarrow{s_2} \circ \overrightarrow{s_1} = Rot_\theta$$

d'après la décomposition d'une rotation vectorielle comme produit de réflexions par rapport à des droites formant un angle de $\frac{\theta}{2}$ •

23.3.3.2 Similitudes directes du plan

Définition 23.3.8 *On dit que la transformation h du plan est l'homothétie $H_{\Omega,\lambda}$ de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, lorsque*

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad h(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$$

i.e. Ω est l'unique point fixe de h et $\overrightarrow{h} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{P}^2, \quad M' = h(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$$

♠

Définition 23.3.9 *Toute composée d'une isométrie ρ et d'une homothétie h est ce qu'on appelle une similitude s*

$$s = \rho \circ h \qquad (resp. \quad s = h \circ \rho)$$

♠

Remarque: quitte à changer, ρ en $-\rho$, on peut supposer h homothétie de rapport strictement positif

Proposition 23.3.10 *toute similitude est une* ***bijection*** *qui conserve le rapport des distances*
En notant A, B, C, D quatre points distincts du plan, et A', B', C', D' ses images respectives

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

♣

Définition 23.3.10 *On appelle rapport de la similitude s, le rapport d'une (resp. de toute) homothétie h de rapport positif tel que*

$$s = \rho \circ h \quad ou \quad s = h \circ \rho$$

où ρ est une isométrie ♠

Remarque: En notant A, B deux points distincts du plan, et A', B' ses images respectives, le rapport λ de la similitude s est donnée par

$$\lambda = \frac{A'B'}{AB}$$

Proposition 23.3.11 *L'image d'une droite (resp. deux droites parallèles, resp. deux droites perpendiculaires) par une similitude est une droite (resp. deux droites parallèles, resp. deux droites perpendiculaires)*
♣

Proposition 23.3.12 *L'image d'un cercle de rayon R par une similitude de rapport λ est un cercle de rayon λR* ♣

Proposition 23.3.13 *l'image d'un polygone (resp. polygone régulier) par une similitude est un polygone (resp. polygone régulier) de même nature* ♣

Définition 23.3.11 *Soit s une similitude du plan on dit que s est une similitude directe lorsque s est la composée d'un déplacement et d'une homothétie.* ♠

Exemple: les homothéties de rapport non nul, les rotations et les translations sont des similitudes directes

Remarque: l'ensemble des similitudes a une structure de groupe de transformations, les similitudes directes en constituent un sous-groupe

Exercice: Soit s une transformation affine et $\lambda > 0$, montrer que

$$s \quad \text{est une similitude directe de rapport} \quad \lambda \Longleftrightarrow \frac{\overrightarrow{s}}{\lambda} \in SO(\overrightarrow{\mathcal{A}})$$

Proposition 23.3.14 *Soit $\mathcal{R}$ une r.o.n.d. de $\mathcal{P}$, toute similitude admet relativement aux affixes par rapport à $\mathcal{R}$ une écriture complexe de la forme*

$$z \mapsto az + b$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ ♣

Démonstration On a les correspondances

application complexe	application linéaire
$z \mapsto z$	$Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$
$z \mapsto e^{i\theta} z$	Rot_θ
$z \mapsto \lambda z$	H_λ

D'où les correspondances

application complexe	application affine
$z \mapsto z + b$	transalation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$
$z \mapsto e^{i\theta} z + b$	$Rot_{\Omega,\theta}$
$z \mapsto \lambda z$	$H_{\Omega,\lambda}$

avec $\Omega(\omega)$ et ω point fixe de l'application complexe.
On conclut par composition de ces différents type d'applications •

Exercice: Montrer qu'une similitude directe envoi le milieu d'un segment sur le milieu du segment image

Proposition 23.3.15 *Toute similitude directe s autre qu'une translation est une homothétie-rotation*

$$s = Rot_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,\lambda} = H_{\Omega,\lambda} \circ Rot_{\Omega,\theta}$$

On dit qu'il s'agit de la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ ♣

Remarque 23.3.1 (Preuve)
s est une similitude directe (autre qu'une translation) de centre $\Omega(\omega)_{\mathcal{R}}$, d'angle θ et de rapport $\lambda > 0$ si et seulement si son écritures complexe est

$$z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

*

Corollaire 23.3.16 *Soit s une similitude directe autre qu'une translation, son centre Ω est l'unique point fixe de s, son angle est donnée par*

$$\widehat{A\Omega A'} \ [2\pi]$$

Où A est un point de $\mathcal{P}$ et A' son image. ♣

Remarque 23.3.2 (Preuve)
Une similitude directe dont l'application correspondante s'écrit

$$z \mapsto az + b \qquad (avec\ \ (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \quad et \quad a \neq 1)$$

est la similitude de rapport $|a|$ *d'angle* $arg(a)$ *et de centre* $\Omega(\omega)_{\mathcal{R}}$ *qui vérifie (puisque c'est un point fixe) :*

$$a\omega + b = \omega$$

*

Proposition 23.3.17 *Etant donnés deux segments* $[AB]$ *et* $[A'B']$ *de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant* A *en* A' *et* B *en* B' ♣

Démonstration En notant $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les affixes respectives de A, A', B, B', l'objectif est donc de trouver $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a\alpha + b & = & \alpha' \\ a\beta + b & = & \beta' \end{cases}$$

C'est un système de CRAMER puisque son déterminant vérfie $\alpha - \beta \neq 0$ car $A \neq B$.
On en déduit l'existence et l'unicité de la solution et que

$$a = \frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta} \in \mathbb{C}^*$$

En effet $A' \neq B'$ •

Proposition 23.3.18 *Etant donnés trois points* A, B, C *et* A', B', C' *leurs images respectives par une similitude directe, on a alors*

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}\ [2\pi]$$

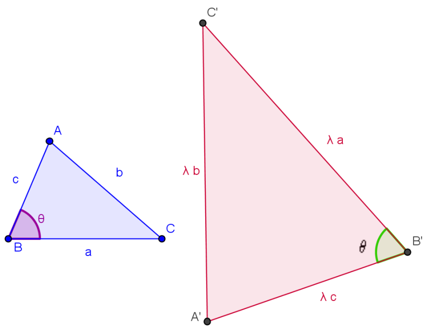
♣

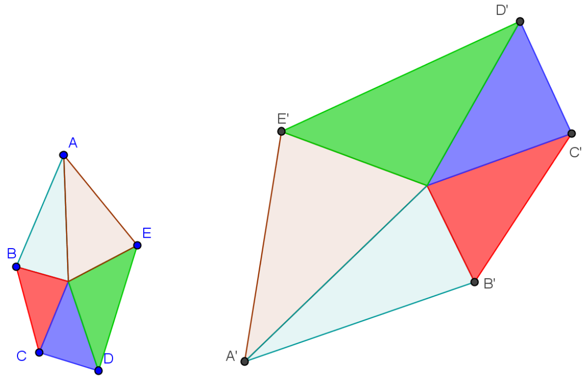
Corollaire 23.3.19 *l'image d'un polygone convexe (resp. un cercle) d'aire* A *par une similitude est un polygone convexe(resp. un cercle) d'aire* $\lambda^2 A$ ♣

Démonstration Pour le cercle c'est clair, pour le polygone on se ramène au cas du triangle.

Par conservation des angles orientés et la dilatation des distances

$$Aire(ABC) = \frac{ac\sin\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad Aire(A'B'C') = \lambda^2 \frac{ac\sin\theta}{2}$$





On conclut dans le cas général par triangulation : un poygone convexe est la réunion disjointe de triangles par triangulation, et on conclut par la conservation des angles orientés et la dilatation des distances •

23.3.4 Isométries de l'espace

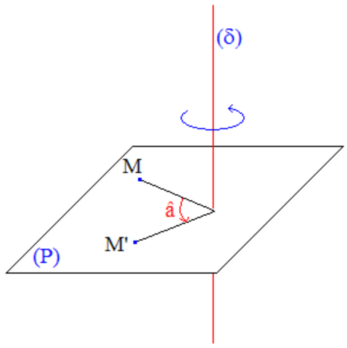
Dans ce paragraphe on se place dans le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{E}$

Définition 23.3.12 *On dit que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est la rotation d'angle θ autour de $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{\omega}$ oriénté par $\overrightarrow{\omega}$ lorsque*

$$\overrightarrow{f} = Rot_{\overrightarrow{\omega},\theta} \quad et \quad f(\Omega) = \Omega$$

on note $Rot_{\Delta,\overrightarrow{k},\theta}$ la rotation d'angle θ autour de Δ orienté par $\overrightarrow{\omega}$:

$$\overrightarrow{Rot_{\Delta,\overrightarrow{\omega},\theta}} = Rot_{\overrightarrow{\omega},\theta} \qquad et \qquad \Delta = Inv(Rot_{\Delta,\overrightarrow{\omega},\theta}) = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{\omega}$$



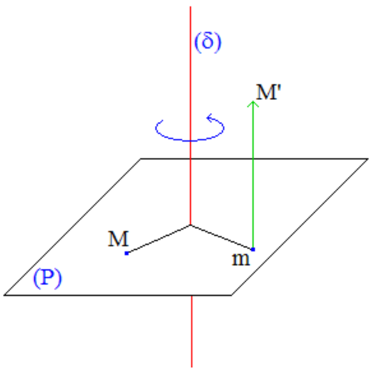
♠

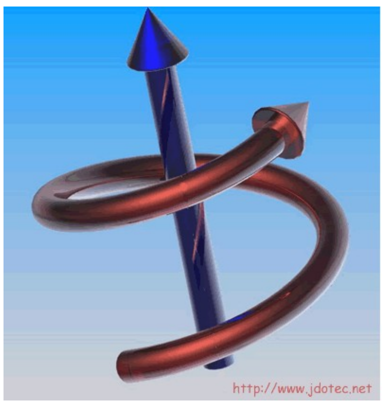
Exemple: les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries de l'espace Dans le cas d'une rotation

Définition 23.3.13 *On appelle vissage v toute transformation affine composée d'une translation $\tau_{\overrightarrow{k}}$ de vecteur $\overrightarrow{k}$ et d'une rotation axiale $Rot_{\Delta,\overrightarrow{k},\theta}$ d'angle θ autour de Δ orienté par $\overrightarrow{k}$*

$$v = \tau_{\overrightarrow{k}} \circ Rot_{\Delta,\overrightarrow{k},\theta} = Rot_{\Delta,\overrightarrow{k},\theta} \circ \tau_{\overrightarrow{k}}$$

♠





Remarque: Méthode pour déterminer v : On détermine la rotation $\overrightarrow{v} = Rot_{\overrightarrow{\omega},\theta}$.
On chercher Ω tel que

$$\overrightarrow{\Omega g(\Omega)} \wedge \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$$

Puis on calcule λ tel que

$$\overrightarrow{k} := \overrightarrow{\Omega g(\Omega)} = \lambda \overrightarrow{\omega}$$

le signe de λ est donné par celui du produit scalaire $\left(\overrightarrow{\Omega g(\Omega)} \mid \overrightarrow{\omega}\right)$

• **Si** $\lambda > 0$ **Alors**

$$v = \tau_{\overrightarrow{k}} \circ Rot_{\Delta, \overrightarrow{k}, \theta}$$

• **Si** $\lambda < 0$ **Alors**

$$v = \tau_{\overrightarrow{k}} \circ Rot_{\Delta, \overrightarrow{k}, -\theta}$$

• **Si** $\lambda = 0$ **Alors**

$$v = Rot_{\Delta, \overrightarrow{k}, \theta}$$

Remarque: les vissages, les rotations et les translations sont des déplacements

Proposition 23.3.20 (admis) *Tout déplacement de l'espace est soit un translation, soit une rotation soit un vissage* ♣

Démonstration Puisque $SO(\overrightarrow{\mathcal{A}})$ est l'ensemble des rotations axiales de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.
Soit f un déplacement, on a $\overrightarrow{f} \in SO(\overrightarrow{A})$, et suivant que $\overrightarrow{f}$ est soit l'identité soit une rotation d'angle non nul on a f est une translation où une composée d'une rotation et d'une translation τ. On peut toujours choisir τ comme translation selon un vecteur de l'axe de rotation ce qui nous donne bien soit un vissage soit une rotation (translation de vecteur nul) •

Proposition 23.3.21 *Les déplacements f de $\mathcal{E}$ de type rotation ou translation s'écrivent comme la composée de deux réflexions s_1 et s_2 relatives à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement.*

$$f = s_2 \circ s_1$$

• **Si** $f := \tau_{\overrightarrow{u}}$ *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$, *on peut prendre* $\mathcal{P}_2 = \tau_{\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(\mathcal{P}_1)$

• **Si** $f := Rot_{\Delta, \overrightarrow{k}, \theta}$ *autour de* $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ *orienté par* $\overrightarrow{k}$ *et d'angle* θ, *on peut prendre*

$$\Delta \in \mathcal{P}_1 \qquad et \qquad \mathcal{P}_2 = Rot_{\Delta, \overrightarrow{k}, \frac{\theta}{2}}(\mathcal{P}_1)$$

$$i.e. \qquad \mathcal{P}_1 = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{k} + \mathbb{R}\overrightarrow{u} \qquad et \qquad \mathcal{P}_2 = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{k} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} \qquad avec \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{k} \quad et \quad \overrightarrow{v} = Rot_{\overrightarrow{k}, \frac{\theta}{2}}(\overrightarrow{u})$$ ♣

Démonstration
• Si f est la translation de vecteur u on se ramène au cas du plan en décomposant la translation τ induite sur $(\mathbb{R}\overrightarrow{k})^{\perp}$ un plan contenant u.
On en déduit que f est la composée de deux réflexions relatives aux plans $\Delta_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ et $\Delta_2 + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ respectivement. où Δ_1 et Δ_2 sont des axes du plan de $(\mathbb{R}k)^{\perp}$ qui entrent dans la décomposition de τ

• Si f est une rotation d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$, On décompose la rotation r induite sur $(\mathbb{R}\overrightarrow{k})^{\perp}$.
On en déduit que f est la composée de deux réflexions relatives aux plans $\Delta_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ et $\Delta_2 + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ respectivement. où Δ_1 et Δ_2 sont des axes du plan de $(\mathbb{R}\overrightarrow{k})^{\perp}$ qui entrent dans la décomposition de r
•

Corollaire 23.3.22 *On en déduit que les déplacements s'écrivent comme la composée de* 2 *ou* 4 *réflexions* ♣

Démonstration Dans le cas d'une rotation ou une translation on a a faire à deux réflexions, dans le cas d'un vissage, par composition d'une rotation et d'une translation, on a à faire à 4 réflexions. •